



Exercice N°1 : (3pts)

Cocher la bonne réponse

1/  $\lim_{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  est egal à :

a/ 1                                      b/  $\frac{1}{e}$                                       c/ e

2/  $\lim_{0+}(n^n)$  est egal à

a/ e                                      b/ 1                                      c/ 0

3/ l' inverse de 6 modulo 11 est l' entier x vérifiant

a/  $x \equiv -3[\text{mod}11]$                       b/  $x \equiv -3[\text{mod}6]$                       c/  $x \equiv 3[\text{mod}11]$

4/ le quotient par la division euclidienne de (-1487) par 11 est

a/ -135                                      b / -136                                      c/ -134

Exercice N°2 (3pts)

Soit la fonction f définie par  $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1/Montrer que f est continue à droite en 0

2/ étudier la dérivabilité de f à droite en 0

3/dresser le tableau des variations de f

4/Montrer que l' équation  $x^x = e$  , admet une unique solution strictement positive

Exercice N°3(7pts)

1/ a. Etudier suivant les valeurs de l' entier naturel n le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 11

b/ Montrer que l' entier  $(2018)^{2020} - 1$  est divisible par 11

2/ Pour tout entier naturel n , on pose :  $S_n = 1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$

a. Montrer que pour tout l' entier n , on a :  $4S_n = 5^{n+1} - 1$

b. Montrer que pour tout entier naturel n ;  $S_n$  et  $5^n$  sont premiers entre eux

c. Soit  $a$  un entier, montrer que

$$4S_n \equiv a \pmod{11} \text{ si et seulement si } S_n \equiv 3a \pmod{11}$$

d. En déduire le reste de la division euclidienne de  $S_{2018}$  par 11

e. Déterminer le plus petit entier naturel non nul  $n$  tel que  $S_n$  soit divisible par 11

3/ Soit  $n$  un entier naturel non nul donné. On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

l'équation : (E) :  $5^n x + S_n y = 1$

a/ Justifier que admet au moins une solution

b/ Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation :

4/ Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  le système suivant : 
$$\begin{cases} 25x + 31y = 1 \\ x \equiv y \pmod{5} \end{cases}$$

#### Exercice N°4(7pts)

1/ Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x - 1 - x$

a. Étudier le sens de variation de puis déduire le signe de  $f(x)$

b. Déduire que pour tout réel  $x > 0$  ;  $1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$

c. Montrer que pour tout réel  $x > 0$  et pour tout entier  $n > 1$

$$1 - \frac{1}{nx} \leq e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1 - \frac{1}{1+nx}$$

2/ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ; on pose  $U_n = \int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\right) dt$  et  $V_n = n U_n$

a. Montrer que pour tout  $n > 0$  ,  $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n}$

b. Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$

3/  $n$  étant un entier naturel non nul, pour tout réel

$x \geq 1$ , on pose  $F_n(x) = \int_n^{2n} g(t) dt$

ou  $g$  est la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(t) = 1 - e^{-\frac{1}{t}}$

a. Vérifier que pour tout réel  $x \geq 1$  ,  $F_n'(x) = n\left(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\right)$

b. calculer  $F_n(1)$  puis déduire que  $U_n = \frac{1}{n} \int_n^{2n} g(t) dt$

c. interpréter graphiquement les termes de chacune des suites  $(u_n)$  et  $(V_n)$