

EXERCICE 1 😊

1

- 1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.
- b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5.
- c) En déduire que $6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$ et que $6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$
- d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55
- 2) Dans cette question x et y désignent deux entiers relatifs.
 - a) Vérifier que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
 - b) Vérifier que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
 - c) Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation (E'). En déduire le reste modulo 40 de 17.

CORRECTION 😊

MATH

- 1) a) $6^5 = 7776 = 11 \times 706 + 10 \Rightarrow 6^5 \equiv 10 \pmod{11}$
 $\Rightarrow 6^5 \equiv -1 \pmod{11}$ ou encore $6^{10} \equiv 1 \pmod{11}$
- b) $6^2 = 36 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 6^4 \equiv 1 \pmod{5}$
- c) $6^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$
 $6^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$
- d) $\begin{cases} 6^{40} \equiv 1 \pmod{11} \\ 6^{40} \equiv 1 \pmod{5} \\ 5 \wedge 11 = 1 \end{cases} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1 \pmod{5 \times 11}$
 $\Rightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0 \pmod{55}$
- 2) a) $65 \wedge 40 = 5 \neq 1$ donc (E) n'admet pas de solutions.
- b) $17 \wedge 40 = 1$ donc (E') admet au moins une solution.
- c) Remarquons que $(-7, -3)$ est une solution particulière de (E').
 (Algorithme d'euclide)
 $\begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17(x + 7) = 40(y + 3)$
 $\Rightarrow 17$ divise $(y + 3)$ et 40 divise $(x + 7)$ car $17 \wedge 40 = 1$
 $\Rightarrow y = 17k - 3$ et $x = 40k - 7$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
 Inversement ; Si $x = 40k - 7$ et $y = 17k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
 $17(40k - 7) - 40(17k - 3) = -119 + 120 = 1$.
 Ainsi $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(40k - 7, 17k - 3); k \in \mathbb{Z}\}$
 Pour $k = 1$, $(33, 14)$ est une solution de (E') c'est-à-dire

$17 \times 33 - 40 \times 14 = 1 \Rightarrow 17 \times 33 = 40 \times 14 + 1$ ou encore
 $17 \times 33 \equiv 1 \pmod{40}$ et par suite 33 est l'inverse modulo 40 de 17.

EXERCICE 2 😊

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

- 1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n , le reste de 7^n modulo 100.
- 2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.
- 3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$.
 b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100} .

CORRECTION 😊 à faire 😞

EXERCICE 3 😊

Soient $a = 2n + 1$ et $b = 5n + 1$ deux entiers.

1. Déterminer deux entiers u et v tels que $au + bv = 3$
2. En déduire les valeurs possibles de $d = \text{PGCD}(a, b)$?
3. Montrer que si $n \equiv 1 \pmod{3}$ alors $d = 3$, que vaut d sinon ?

CORRECTION 😊

1. $5a - 2b = 5(2n + 1) - 2(5n + 1) = 3$
2. d divise 3, donc $d = 1$ ou $d = 3$.
3. Si $n \equiv 1 \pmod{3}$, $a = 2n + 1 \equiv 3 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$ donc 3 divise a et $b = 5n + 1 \equiv 6 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$ donc 3 divise b . 3 est un diviseur commun à a et à b , donc $d \geq 3$, dans ce cas $d = 3$.
 Si $n \equiv 0 \pmod{3}$ alors $a = 2n + 1 \equiv 1 \pmod{3} \not\equiv 0 \pmod{3}$ donc 3 ne divise pas a , 3 n'est pas un diviseur commun à a et à b , donc $d = 1$.
 Si $n \equiv 2 \pmod{3}$ alors $a = 2n + 1 \equiv 5 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3} \not\equiv 0 \pmod{3}$ donc 3 ne divise pas a , 3 n'est pas un diviseur commun à a et à b , donc $d = 1$.

Exercice 4 😊

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux
2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs
 - 2.1. Montrer que 87 et 31 sont premiers entre eux.
 - 2.2. En déduire un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $87u + 31v = 1$, puis une solution (x_0, y_0) de (E)
 - 2.3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

CORRECTION 😊

1.

$$5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 1$$

Est une identité de Bézout, 1 divise le PGCD de $14n + 3$ et de $5n + 1$ donc leur PGCD vaut 1, ils sont premiers entre eux.

2.

2.1. $87 = 14 \times 6 + 3$ et $31 = 5 \times 6 + 1$ d'après la première question, ils sont premiers entre eux.

2.2. D'après la première question

$$5(14 \times 6 + 3) - 14(5 \times 6 + 1) = 1 \Leftrightarrow 5 \times 87 + (-14) \times 31 = 1 \quad (1)$$

Donc $(u, v) = (5, -14)$ convient.

Il suffit de multiplier (1) par 2.

$$10 \times 87 + (-28) \times 31 = 2$$

2.3.

$$\begin{aligned} L_1 \{ & 87x + 31y = 2 \\ L_2 \{ & 10 \times 87 + (-28) \times 31 = 2 \\ L_1 - L_2: & 87(x - 10) + 31(y + 28) = 0 \\ & 87(x - 10) = 31(-y - 28) \quad (2) \end{aligned}$$

87 et 31 sont premiers entre eux et 87 divise $31(-y - 28)$ donc 87 divise $-y - 28$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$-y - 28 = 87k \quad (3) \Leftrightarrow y = -87k - 28$$

On remplace (3) dans (2)

$$87(x - 10) = 31 \times 87k \Leftrightarrow x - 10 = 31k \Leftrightarrow x = 10 + 31k$$

La réciproque est évidente et l'ensemble des solutions est :

$$\{(10 + 31k, -28 - 87k), k \in \mathbb{Z}\}$$

EXERCICE 5 😊

- 1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{10}$.
 - a) Montrer que $a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv 0 \pmod{10}$.
 - b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

(On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a - 1)(a^9 + a^8 + \dots + a + 1)$).

- 2) Soit b un entier.
 - a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.
 - b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ si et seulement si b est premier avec 10.
- 3) Soit b un entier premier avec 10.
 - a) Montrer que $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$.
 - b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

INTEGRATION

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^n f(x) dx$$

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$$

- a. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$I_n \leq \int_0^n 2 \cdot x \cdot e^{-x} dx$$

- b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que : $H(x) = (-x-1) \cdot e^{-x}$.
Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H .

iers

c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $I_n \leq 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Correction 😊

1. Etudions la différence suivante :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{n+1} f(x) dx - \int_0^n f(x) dx \\ &= \int_0^{n+1} f(x) dx + \int_n^0 f(x) dx \end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$= \int_n^{n+1} f(x) dx$$

Or, on a : $\begin{cases} n \leq n+1 \\ \text{Pour tout } x \in [n; n+1[, \text{ on a : } f(x) \geq 0 \end{cases}$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0$$

$$I_{n+1} - I_n \geq 0$$

$$I_{n+1} \geq I_n$$

Ainsi, la suite (I_n) est une suite croissante.

2. a. Utilisons la comparaison donnée dans l'énoncé pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$$

$$e^x - x \geq \frac{e^x}{2} > 0$$

La fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}_+ :

rs

$$\frac{1}{e^x - x} \leq \frac{2}{e^x}$$

Le nombre x étant positif :

$$\frac{x}{e^x - x} \leq 2x \cdot e^{-x}$$

Grâce à la positivité de l'intégrale :

$$\int_0^n \frac{x}{e^x - x} dx \leq \int_0^n 2x \cdot e^{-x} dx$$

$$I_n \leq \int_0^n 2x \cdot e^{-x} dx$$

- b. L'expression de la fonction H est donnée sous la forme d'un produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = -x - 1 \quad ; \quad v(x) = e^{-x}$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = -e^{-x}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction H' dérivée de la fonction H :

$$\begin{aligned} H'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= (-1) \cdot e^{-x} + (-1 - x) \cdot (-e^{-x}) = -e^{-x} + (1 + x) \cdot e^{-x} \\ &= [-1 + (1 + x)] \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

- c. La primitive de la fonction $x \mapsto 2x \cdot e^{-x}$ est la fonction $2 \cdot H$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n 2x \cdot e^{-x} dx = [2 \cdot H(x)]_0^n \\ &= 2 \cdot [(-n-1) \cdot e^{-n}] - 2 \cdot [(-0-1) \cdot e^{-0}] = 2 \cdot [(-n-1) \cdot e^{-n}] + 2 \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel, on a :

rs