Mathématiques

4ème Maths

**DEVOIR DE CONTRÔLE N° 03**

Durée : 2 heures

Année scolaire : 2015 // 2016

Professeur

Elabidi Zahi

## EXERCICE 01 (6 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .On considère les points $A(0;0;1)$ , $B(1;0;1)$ $C(2;1;-1)$ et $I(-2;1;2)$

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

b) Calculer l'aire du triangle ABC

c) En déduire la distance de C à la droite $(AB)$

2) a) On note P le plan (ABC).Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $2y+z-1=0$

b) Montrer que les points A, B, C et I déterminent un tétraèdre dont on calculera le volume V

3) Soit S l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que :

$x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z+3=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon

b) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre $\Omega$ et le rayon r

4) Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{5}$

a) Donner l'expression analytique de h

b) Déterminer $S'=h(S)$

c) Déterminer une équation cartésienne de $P'=h(P)$

## EXERCICE 02 (5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ , on considère la courbe $(E)$ d'équation $x^2-4x+4y^2+3=0$

1) Montrer que $(E)$ est une ellipse dont on précisera les foyers et les directrices

2) Soit $\zeta$ la courbe représentative, dans $(O;\vec{i};\vec{j})$ , de la fonction f définie sur $[1;3]$ par $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+4x-3}$ .Justifier que $(E)=\zeta\cup\zeta'$ où $\zeta'=S_{(O,\vec{i})}(\zeta)$

3) Soit F la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $F(x)=\int_1^{2+\cos x} f(t)dt$

a) Montrer que $\forall x\in[0;\pi]$ , $F'(x)=-\frac{1}{2}\sin^2 x$ .

b) En déduire que : $\forall x\in[0;\pi]$ , $F(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\sin 2x$

c) Déterminer alors l'aire de la surface intérieure de $(E)$



www.devoirat.net 2018

## EXERCICE 03 (09 points)

I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{x}}$ et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Déterminer les branches infinies de $(C)$

   b) Tracer $(C)$

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera

   b) Tracer, dans le même repère la courbe $(C')$ de la fonction réciproque $f^{-1}$ de f

   c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

4) a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x)=e^{x}-\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

   b) Soit $\lambda$ un réel strictement négatif.
   Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limitée par la courbe $(C)$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=0$

II- Pour tout entier naturel non nul n et tout réel négatif x on pose $F_n(x)=\displaystyle\int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^{t}}dt$

1) a) Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x)=\ln 2$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x)$

2) a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall\ x\le 0$ on a : $F_{n+1}(x)+F_n(x)=\dfrac{1}{n}\left(1-e^{nx}\right)$

   b) Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$

3) a) Vérifier que $\forall\ t\le 0,\quad 2e^{t}\le 1+e^{t}\le 2$

   b) Montrer que $\forall n\ge 2$ et $\forall\ x\le 0$ on a : $\dfrac{1}{2n}\left(1-e^{nx}\right)\le F_n(x)\le \dfrac{1}{2(n-1)}\left(1-e^{(n-1)x}\right)$

   c) En déduire un encadrement de $\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$ pour $n\ge 2$

Prof: Elaidi Zaki



www.devoirat.net 2018