Mathématiques

$4^{ème}$ Maths

Devoir de contrôle N° 01
Durée : 2 heures

Professeur

Elabidi Zahi

Exercice 01 (4points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x<0\\ \sqrt{x^2+x+1}-x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

b) Calculer alors $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(\tan x)$.

2) Montrer que f est continue en 0

4) a) Montrer que pour tout $x<0$, on a : $\dfrac{x+2}{x}\leq f(x)\leq 1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) Calculer alors $\lim\limits_{x\to1^-} f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $]-2;-1[$

Exercice 02 (8points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}u_0=\dfrac{3\pi}{4}\\ u_{n+1}=u_n-\cos(u_n)\text{ , }\forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1) Montrer que la fonction $f : x\mapsto x-\cos x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{3\pi}{4}\leq u_n\leq\dfrac{3\pi}{2}$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

3) a) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(u_k)=\dfrac{3\pi}{4}-u_{n+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(u_k)$

4) Soit x un réel

Développer $\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)^2$ puis déduire que $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1-\cos x}{2}$

5) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\sin^2\left(\dfrac{u_k}{2}\right)$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{2(n+1)}-\dfrac{3\pi}{8(n+1)}$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n$

Exercice 03 (8points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit θ un réel de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe $z \neq \cos\theta$, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{z^2-1}{2z-2\cos\theta}$

1) a) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation $(E): z^2-(2\cos\theta)z+1=0$

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

c) Ecrire sous la forme exponentielle les solutions de l'équation (E)

2) Soit A et B les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\cos\theta\ ;\ e^{-i\theta}\}$ on a : $\frac{z'-e^{i\theta}}{z'-e^{-i\theta}} = \left(\frac{z-e^{i\theta}}{z-e^{-i\theta}}\right)^2$

b) En déduire que pour tout point M distinct de A et de B on a :

$$\frac{M'A}{M'B} = \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}})[2\pi]$$

3) a) Montrer que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ alors M' appartient à $[AB]$

b) $\mathscr{C}$ coupe $(O,\vec{u})$ en E et F. Montrer que E et F ont la même image par f qu'on précisera