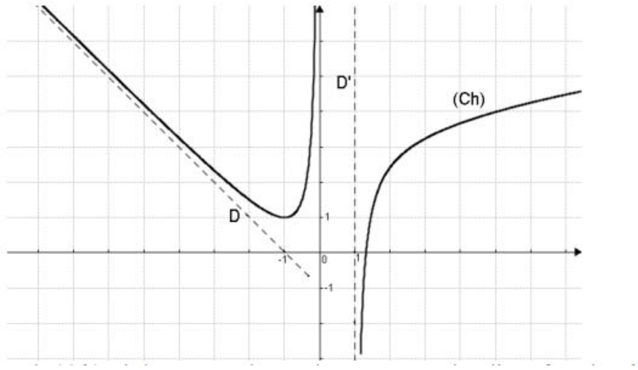
Lycée Zeramdine	DEVOIR DE CONTROLE	Prof : CHEBBI.L
Date : 13 - 11 - 2017	N :1	Classe : $4^{ème}$ S.I

Exercice n : 1

La courbe C est la représentation graphique d'une fonction f dan un repère orthonormé .On sait que C admet trois asymptotes (yy') ,

D : y = - x – 1 et D' et une branche parabolique de direction (xx') au voisinage de $+\infty$



1) Répondre par vrai ou faux

a- l'ensemble de définition de f est IR-$\{0\ ,1\}$ b- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

2) a- Déterminer en justifiant les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\quad,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)+4x\quad,\ \lim_{x\to1}f\left(\frac{2}{|x-1|}\right)\quad,\ \lim_{x\to-1}f\circ f(x)\quad,$$

b- Déterminer une valeur approchée de $f(-10^7+1)$

c – Déterminer l'image par f des intervalles $]-\infty,0[$,]1 ,5]

Exercice n :2

Soit f la fonction est définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ \dfrac{x^2\sin(\frac{2}{x})}{1+x} & \text{si } x>0\end{cases}$

1/a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $\dfrac{-x^2}{1+x}\le f(x)\le\dfrac{x^2}{1+x}$

b) Déduire la limite de f à droite en 0

c) Calculer la limite de f à gauche en 0. Déduire que f est continue en 0

2/a) Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\frac{2}{x})=2$. Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice n : 3

1) a- Vérifier que : $(1-i)^2 = -2i$

b- Résoudre dans C, l'équation : $2z^2-(3+5i)z-2+4i=0$

2) On considère l'équation dans C, l'équation (E) : $2z^3-(7+5i)z^2+(4+14i)z+4-8i=0$

a- Vérifier que 2 est une solution de (E).

b- Résoudre alors l'équation (E).

3) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=2$; $z_B=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ et $z_C=1+i$.

a- Montrer que les triangles OBC et OAC sont rectangle en C.

b- En déduire que les points A, B et C sont alignés.

4) A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}(1+i)$

a- Montrer que $\frac{z'-z_C}{z-z_C}=-\frac{1}{2}$.

b- En déduire que les points C, M et M' sont alignés

Exercice n :4

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $U_0=-1$ et pour tout $n\geq 0$, $U_{n+1}=\frac{9}{6-U_n}$.

1°/ a) Démonter, par récurrence, que $\forall n \in IN$, $U_n \leq 3$.

b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante .

3°/ En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel l qu'on précisera .

4°/ On pose $V_n = \frac{1}{U_n-3}$ pour tout $n\geq 0$.

a) Montrer que V_n est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n .En déduire l'entier n pour lequel $U_n=\frac{23}{9}$.

c) Retrouver alors la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n} \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \leq u_n \leq 4$

b) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n)^2+3u_n+4}{\sqrt{4+3u_n}+u_n}$ puis montrer que (u_n) est croissante

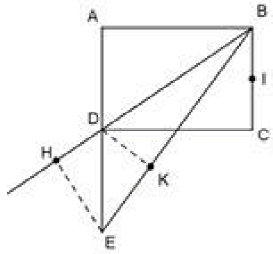
c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{|u_n - 4|}{2}$

En déduire que pour tout n de IN, $|u_n - 4| \leq \frac{4}{2^n}$

b) Retrouver les résultats du 1°) c)

EXERCICE N12:



On considère un rectangle ABCD de centre O et tel que AB= $\sqrt{3}$cm et AC=2cm. Soit le point I le milieu de [BC].

1) Calculer : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$. En déduire $\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\|$.

2) calculer : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$. En déduire $\cos(\widehat{IAB})$.

3) Soit le point E le symétrique de A par rapport à D. Soit H et K les projetés orthogonales respectifs de E sur (BD) et de D sur (EB). Calculer $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EB}$. En déduire les distances HD et EK.

EXERCICE N13: (QCM/VF)

I/ *Pour chacune des propositions suivantes, une seule réponse est correcte. Préciser la :*

1) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB=a et $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{6}$ alors le réel $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ = :

a) $\frac{1}{2}a^2$ **b)** a^2 **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

2) Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tels que $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w})$ alors :

a) $\vec{v}+\vec{w}=\vec{v}-\vec{w}$ **b)** $\vec{v}\perp\vec{w}$ **c)** $\vec{u}\perp\vec{w}$

3) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$, $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=3$ alors :

a) $\|\vec{u}-\vec{v}\|=1$ **b)** $\|\vec{u}-\vec{v}\|=5$ **c)** $\|\vec{u}-\vec{v}\|=0$

II/ *Pour chacune des propositions suivantes, répondre par vrai ou faux :*

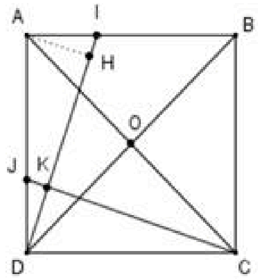
1) Si A, B et C sont trois points distincts du plan vérifiant AB=2 et AC=3 alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$

2) Si A, B, C et D quatre points du plan alors $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}^2$

3) Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs du plan tels que $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\|=\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{CD}\|$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de même sens.

EXERCICE N1 :

Soit ABCD un carré de centre O et de coté a, I et J sont les points du plan tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. On désigne par K le point d'intersection des droites (ID) et (JC). Soit H le projeté orthogonal du point A sur (DI).



1) a) Montrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{JC} = -\frac{a^2}{3}$ et que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JC} = \frac{a^2}{3}$

b) En déduire que les droites (ID) et (JC) sont perpendiculaires.

2) a) Montrer que $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DI} = \frac{a^2}{3}$

b) En déduire que DK= $\frac{a}{\sqrt{10}}$

3) a) Montrer que $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{ID} = \frac{7a^2}{9}$ et que $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IB} = -\frac{2a^2}{9}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IO} = \frac{5a^2}{18}$

4) En utilisant un produit scalaire, montrer que : IH×ID= IA^2. En déduire la distance IH.

EXERCICE N2 :

Soit dans un plan P le segment [AB] de longueur 6cm et I son milieu.
Déterminer l'ensemble E dans chacun des cas suivants :

a/ E=$\{M \in P\,;\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 3\}$

b/ E=$\{M \in P\,;\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2\}$

c/ E=$\{M \in P\,;\ MA^2 - MB^2 = 4\}$

d/ E=$\{M \in P\,;\ MA^2 + MB^2 = 19\}$

e/ E=$\{M \in P\,;\ MA^2 - 4MB^2 = 3\}$

EXERCICE N3 :

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que AB=5, AC=4 et BC=3. Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [AI].

1) Calculer à l'aide du théorème de la médiane la distance AI.

2) Soit l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M on associe le réel :
f(M)= $-2MA^2 + MB^2 + MC^2$

a) Exprimer $MB^2 + MC^2$ à l'aide de MI^2 et IB^2

b) Montrer alors que f(M)=$4\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{AI} + 2IB^2$

c) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que f(M)= $\frac{1}{2}$

EXERCICE N4:

Soit dans un plan P un triangle équilatéral ABC de coté a (a> 0) et tel que $\widehat{BAC}$= $\frac{\pi}{3}$ rad
On désigne par I le milieu du segment [AB].

1) a) Exprimer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de a.

b) Montrer que pour tout point M de la médiatrice de [AB], on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$= $\frac{1}{2}a^2$

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A,3) et (B,-2).
Exprimer GA en fonction de a.

3) Pour tout point M du plan on pose $f(M)= 3MA^2 - 2MB^2$

a) Montrer que pour tout point M du plan on a : $f(M)= MG^2 - 6a^2$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, l'ensemble :
$C_m = \{M \in P \,;\, 3MA^2 - 2MB^2 = ma^2\}$

c) Pour quelles valeurs de m, C_m passe t-il par I ?

EXERCICE N5:

Dans un plan P, on considère un carré ABCD de centre O et de coté 4cm. On désigne par I et J les milieux respectifs de [AD] et [DC]. Soit $E= S_C(D)$ et $F= S_D(A)$.
(Voir la figure ci-contre)

1) Montrer que : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OE} = -8$

2) Calculer : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$. En déduire $\cos(\widehat{EAF})$.

3) Montrer que $\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{JI} = 4$

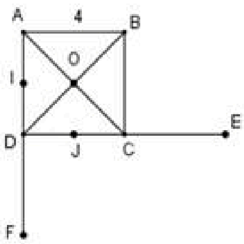
4) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\|$.
Soit K le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,-1) et G le barycentre des points pondérés (K,1) et (I,-4).

a) Construire le point K, puis calculer KI.

b) Calculer GK et GI.

c) Montrer que : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\|$ équivaut à
$3MG^2 = GK^2 - 4GI^2$

d) En déduire l'ensemble $\mathcal{C}$.



EXERCICE N6:

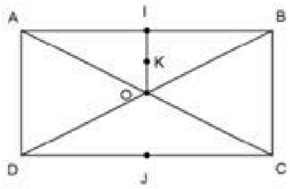
Dans un plan P, on considère un rectangle ABCD de centre O tel que : AB=8 et AD=4.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [AB], [DC] et [OI].

1) Calculer $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$

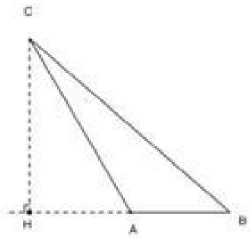
2) Montrer que pour tout point M du plan P, on a :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 2MO^2 - 24$. En déduire $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD}$

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan P tels que :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = -22$

4) Discuter suivants les valeurs du paramètre réel m,
l'ensemble : $C_m = \left\{M \in P;\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 2m\right\}$



EXERCICE N7:



Dans un plan P, on considère un triangle ABC tel que :
AB=a , AC=2a et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$;(a > 0)

1) Montrer que $BC=a\sqrt{7}$

2) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

a) En utilisant un produit scalaire, montrer que AH=a

b) Montrer que H est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,-1).

3) Déterminer l'ensemble (E') des points M du plan tels que : $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AB} = 0$

4) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$