Lycée Cité El-amel	**Devoir de contrôle n°1**	Année scolaire : 2016/2017
Sola Saidi & Mokhtar Ouardani	**(Mathématiques)**	Date : Octobre
Classes : $4^{\text{ème}}$ Maths 1 & 2		Durée : 2 heures

Exercice n° 1 (4 points)

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation (E_θ) : $z^2 - z + e^{i2\theta} - ie^{i\theta} = 0$.

1) a- Vérifier que $(2ie^{i\theta} + 1)^2 = -4e^{i2\theta} + 4ie^{i\theta} + 1$.

   b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

2) On donne les nombres complexes: $z_1 = 4\sqrt{2}(1+i)$, $z_2 = -ie^{i\theta}$ et $z_3 = 1 + ie^{i\theta}$.

   a- Ecrire les nombres complexes z_1, z_2 et z_3, sous la forme exponentielle.

   b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $(z + 2i)^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$.

Exercice n° 2 (7 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe 2, le point B d'affixe -3 et l'application : $f : P \setminus \{A\}$ dans P

qui à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' avec $z' = \dfrac{2iz + 6i}{z - 2}$.

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2(1+i)z - 6i = 0$.

   b- En déduire les points invariants par f.

2) Montrer que:

   a) $OM' = 2\dfrac{BM}{AM}$.

   b) $(\vec{u}, \overrightarrow{CM'}) \equiv \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) [2\pi]$.

3) a- Déterminer l'image par f de la médiatrice de [AB].

   b- Montrer que si M est un point du cercle ζ de diamètre [AB] privé de A et B alors M' appartient à la droite $(O, \vec{u})$.

Exercice n° 3 (9 points)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{n}{a^n}$ où a est un réel strictement supérieure à 2.

1) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq \dfrac{2}{a} u_n$.

   b- En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{a}\right)^n$.

   c- Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) Soit la suite réelle (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

   a- Montrer que (S_n) est une suite croissante.

   b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \dfrac{1}{a-2}$.

   c- En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ.

   d- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $aS_{n+1} - S_n = 1 + \dfrac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n}{a - 1}$.

   e- Montrer que alors que $\ell = \dfrac{a}{(a-1)^2}$.