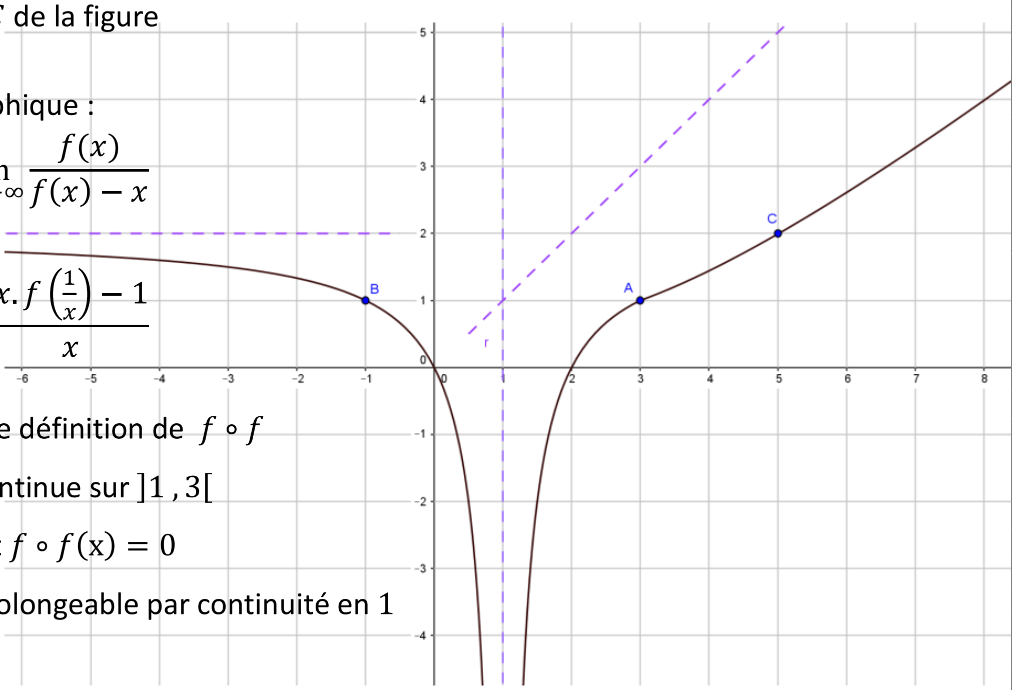
Prof	*Mechmeche Imed*		**Matière**	*Maths*
Lycée	*Nabheni*	*Devoir de contrôle N°1*	**Date**	*04/11/2016*
Niveau	*4ème Maths*		**Durée**	*2 h*

Exercice 1 : (6 pts)

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Les droites $y = 2$, $x = 1$ sont des asymptotes à C_f

La droite $y = x$ est une direction asymptotique à C_f en $+\infty$

C_f passe par les points A , B et C de la figure



1) Déterminer par lecture graphique :

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{f\big(f(x)\big) - 2} \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{f(x) - x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f\big(f(x)\big) - x \quad , \lim_{x\to 0^+} \frac{x.f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x}$$

2) a) Déterminer l'ensemble de définition de $f \circ f$

   b) Montrer que $f \circ f$ est continue sur $]1 , 3[$

   c) Résoudre graphiquement $f \circ f(\mathrm{x}) = 0$

   d) Montrer que $f \circ f$ est prolongeable par continuité en 1

3) Soit g la restriction de $f \circ f$ à l'intervalle $]1 , 3[$

   a) Montrer que g est strictement décroissante sur $]1 , 3[$

   b) Montrer que pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ il existe un unique réel $\mathrm{x_n} \in]1 , 3[$ tel que $\mathrm{g(x_n)} = -\mathrm{n}$

   c) Etudier la monotonie de la suite $(\mathrm{x_n})$

   d) Montrer que la suite $(\mathrm{x_n})$ est convergente puis calculer sa limite

Exercice 2 : (7 pts)

On considère la suite U définie par $U_0 = \sqrt{2}$ et $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{\sqrt{3{U_n}^2+1}}$

1) a) Montrer que $U_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   b) Etudier la monotonie de U

   c) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite

2) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n}{\sqrt{U_n{}^2-1}}$

a) Montrer que la suite V est géométrique

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Retrouver la limite de la suite U

3) On considère la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = 2 - U_n$
Montrer que les suites U et W sont adjacentes.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k{}^2}$$

a) Vérifier que $\frac{1}{U_k{}^2} = 1 - \frac{1}{2^{2k+1}}$

b) Montrer alors que $S_n = n - \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

c) Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$

Exercice 3 : (7 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,,\vec{U}\,,\vec{V}\right)$, on considère l'application f dans le plan qui à tout point $M(Z)$ associe le point $M'(Z' = Z^2 + Z)$ et soit le point $I\left(-\frac{1}{2}\right)$

1) Déterminer les antécédents par f du point d'affixe $i - 1$

2) Soient A et B deux points distincts montrer que $f(A) = f(B)$ équivaut à $A * B = I$

3) Déterminer l'ensemble E des points $M(Z)$ tels que Z' soit un réel.

4) Soit r un réel strictement positif, M un point du cercle $C_{(I\,,r)}$ (cercle de centre I et de rayon r) et on désigne par θ un argument de $Z_{\overrightarrow{IM}}$

a) Exprimer Z puis Z' en fonction de r et θ

b) Déterminer l'image du cercle $C_{(I\,,r)}$ par f

5) Soient a un réel non nul, Ω le point d'affixe ia et Γ le cercle de centre Ω passant par O

Montrer que si $M \in \Gamma \backslash \{O\}$ alors (MM') et tangente à Γ.

6) Déduire de ce qui précède une construction de M' sachant que $M \in \Delta : x = \frac{-1}{2}$

Bon travail.