Lycée Pilote Jendouba Année scolaire : 2016-2017		Prof : REZGUI ADEL Devoir de Synthèse N°3	
12-05-2017	Classe : $4^{ème}$sc	MATHEMATIQUES	Durée : 3 heures

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit (I_n) la suite définie sur N par :

$$I_0 = \int_1^e \frac{dx}{x^2} \text{ et } I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$$ **pour tout** $n \in N^*$

1) a) Calculer I_0

b) Montrer que (I_n) est positive et décroissante.

En déduire qu'elle est convergente.

2)a) Montrer par une intégration par parties que:

pour tout $n \in N^*$ **,** $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$

b) En déduire que pour tout $n \in N^*$ **,** $nI_n \le \frac{1}{e}$

calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ **.**

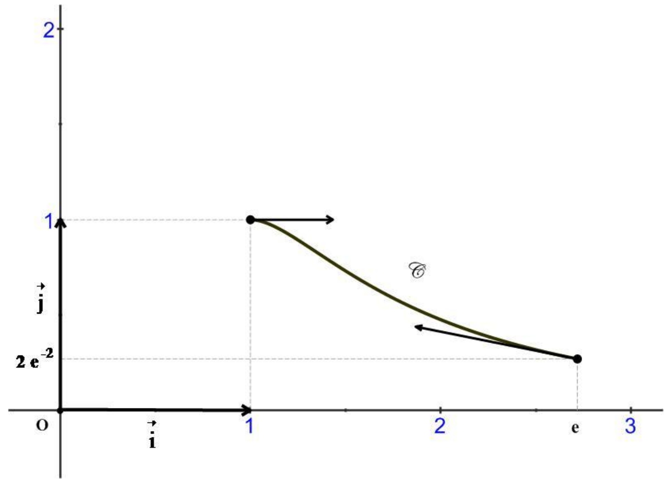
3)

a) Montrer que pour tout $n \in N^*$ **:** $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx = \frac{1}{n+1}$ **.**

b) En déduire que pour tout $n \in N^*$ **:** $\frac{1}{(n+1)e} \le I_n$ **.**

calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$

4) Ci-dessous est la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $[1;e]$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$ **, dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **telque :** $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$



a) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations : $y = 0, x = 1 \text{ et } x = e$ **.**

www.devoirat.net 2017

b) Montrer que f est bijective de $[1;e]$ sur un intervalle J à déterminer .

c) Construire dans l'annexe ci-joint la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction g réciproque de f.

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations : $y=1, x=2e^{-2}$.

<u>EXERCICE 2 :</u> (5 points)

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

I- On note :

. D l'évènement « le composant est défectueux ».

. F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur ».

. F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1) Dresser un arbre pondéré.
2) Calculer $p(D\cap F_1)$, puis démontrer que $p(D)=0,0225$.
3) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur?
4) Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins 1 d'entre eux soit défectueux ?

II- La durée de vie en années, de l'un de ces composants, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec λ un réel strictement positif.

1) Sachant que $p(X \leq 3)=p(X > 3)$ déterminer λ.

Pour les questions suivantes, on prendra λ = 0,225.

2) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ?
3) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?.

<u>EXERCICE 3 :</u> (3 points)

Une entreprise teste la rentabilité d'un produit selon sa durée de vie Y en fonction du nombre d'utilisations annuel X. On suppose que ce produit est destiné à une utilisation professionnelle très élevée.

www.devoirat.net 2017

X (en centaine de fois)	0	0,5	1	1,5	2	3	5	6	7
Y (en années)	10	8	6	5	4	2	1	0,5	0,25

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r .

. Un ajustement affine est –il apprécié ?

2) Déterminer l'équation de la droite de régression D de Y en X.

3) En utilisant l'équation de la droite D :

*) Déterminer le nombre d'utilisations annuel de ce produit pour que sa durée de vie soit 9 ans.

**) Déterminer la duré de vie de ce produit lorsque son utilisation annuelle est égale à 800 fois.

EXERCICE 4 : (6 points)

I-

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_1): y'+y=0$, où y est une fonction dérivable sur R .

2) On considère l'équation différentielle $(E_2): y'+y=e^{-x}$.

a) Vérifier que $f(x)=xe^{-x}$ est une solution de l'équation (E_2) .

b) Montrer que la fonction g est solution de l'équation (E_2) si et seulement si $g-f$ est solution de l'équation (E_1) .

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) .

d)Déterminer la solution h de (E_2) vérifiant :h(1)=0

II- Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x)=(x-1)e^{-x}$

On désigne par ξ_h sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'unité graphique est 2cm en abscisses et 4cm en ordonnées.

1) a) Etudier les variations de h.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe ξ_h au point d'abscisse 1.

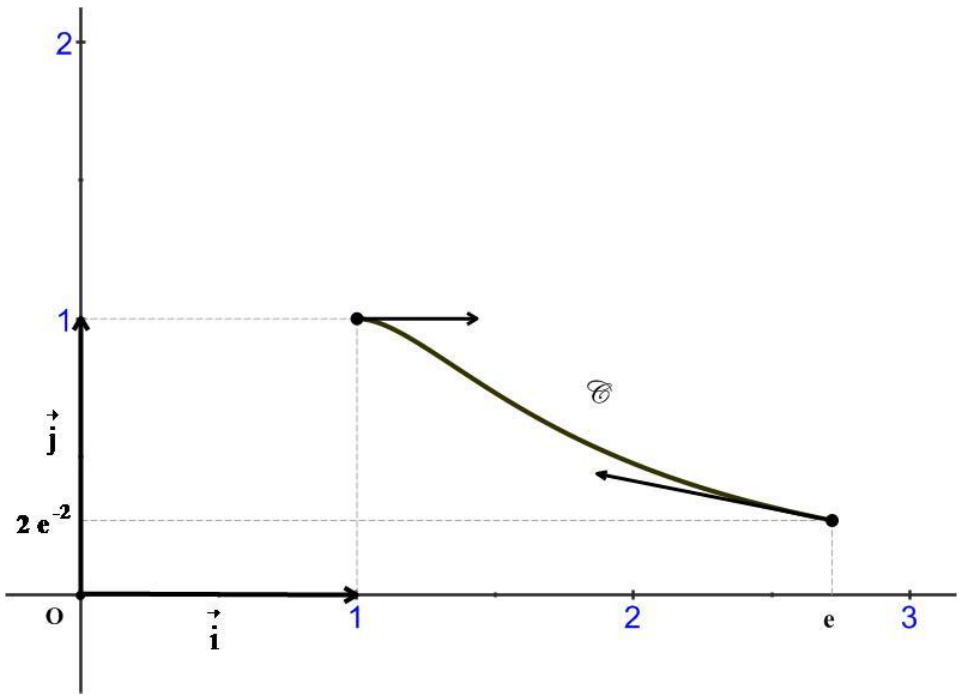
c) Etudier la position relative de ξ_h par rapport à T.

2) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat

b)Tracer T et ξ_h

www.devoirat.net 2017

Figure Exercice n° 1 :



Annexe à rendre avec la copie

Classe :

………………………………

Nom et prénom :

………………………………

………………………………