

Le sujet comporte 2 pages numérotés de 1 à 2

Une copie non soignée sera sanctionnée.

Exercice 1**(6 points)**

On considère la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln(n+k) \right) - \ln(n)$.

1. Démontrer que $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

2. (a) Démontrer que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a :

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

(b) En déduire que :

$$u_n - \frac{1}{n} \ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x) dx \leq u_n$$

3. Déduire de ce qui précède un encadrement de (u_n) .

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 2**(8 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (1 - \ln(x))^2$.

1. Étudier les variations de f .

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e, +\infty[$

(a) Montrer que g réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

(b) Tracer la courbe (\mathcal{C}_f) et la courbe (\mathcal{C}'_g) de g^{-1} dans un même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = \int_1^e (1 - \ln(t))^n dt$.

(a) Calculer t_1 .

(b) En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $t_{n+1} = -1 + (n+1)t_n$.

(c) On désigne par M et N les points de (\mathcal{C}_f) d'abscisses respectives 1 et e .

Soit \mathcal{V} le volume de solide de révolution engendré par la rotation de l'arc \widehat{MN} de la courbe (\mathcal{C}_f) autour de l'axe (O, \vec{i}) . Calculer \mathcal{V} .

Exercice 3**(6 points)**

Un groupe de 22 personnes décide d'aller au cinéma deux samedi de suite pour voir deux films A et B .

Le premier samedi , 8 personnes vont voir le film A et les autres vont voir le film B .

Le deuxième samedi, 4 personnes décident de revoir le film A , 2 vont revoir le film B et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe .

On considère les évènements suivants :

A_1 : "la personne interrogée a vu le film A le premier samedi "

A_2 : "la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi "

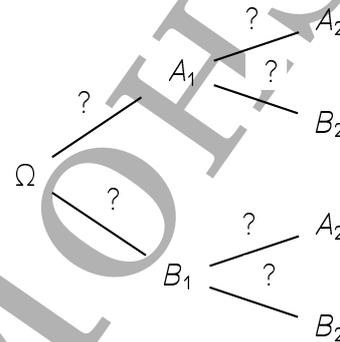
B_1 : "la personne interrogée a vu le film B le premier samedi "

B_2 : "la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi "

1. (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant , en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante .

(b) Calculer : $P(A_2)$

(c) Une personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi , quelle est la probabilité qu'il l'ait vu aussi le premier samedi.



2. Le prix du billet pour le film A est de 30 dinars et de 20 dinars pour le film B .

On appelle X la variable aléatoire égale au cout total , pour la personne interrogée , des deux séances de cinéma.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X .

(b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X