LYCEE TECHNIQUE O . CHATTI M'SAKEN
PROF : MR : BAHLOUL RIDHA

Classe : 4 éme MATH

Le 26 / 03 / 2016

Durée 4 H

DEVOIR DE SYNTHESE N°2

EXERCICE N° 1 :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit **E** la courbe d'équation :

$$(E) : 12x^2 + 16y^2 + 12x - 9 = 0$$

1) **a)** Montrer que **(E)** est une ellipse. Préciser son excentricité, son centre et ses sommets et vérifier que **O** est l'un de ses foyers.
   b) Tracer **(E)** dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
   c) Vérifier que le point **A** $\left(-1, \frac{3}{4}\right)$ appartient à **(E)** et déterminer une équation de la tangente à (**E**) en **A.**
2) Soit **M** ∈ (**E**). On pose $(\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ **et OM = r.** Montrer que : $r = \frac{3}{2(2+\cos\alpha)}$.
3) La droite **(OM)** recoupe (**E**) en un point **N.** Montrer que : $MN = \frac{6}{4-\cos^2\alpha}$.
4) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles **MN** est minimale.

EXERCICE N° 2 :

1) **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n \equiv 1\ (\text{mod } 3)$.
   b) Montrer que : $4^{28} \equiv 1\ (\text{mod } 29)$.
   c) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel **n** le reste modulo **17** de 4^n.
   d) Déterminer alors **trois diviseurs premiers** de $4^{28} - 1$.
2) Soit x un entier vérifiant : $x^{35} \equiv 2\ (\text{mod } 97)$.
   a) Montrer que **x** et **97** sont premiers entre eux.
   b) Justifier que : $x^{96} \equiv 1\ (\text{mod } 97)$.En déduire que : $x \equiv 2^{11}\ (\text{mod } 97)$.
   c) Quel est le reste modulo **97** de **x ?**

3) Pour tout entier naturel on pose $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots\ldots + 5^n$.
   a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel **n** le reste modulo **7** de 5^n.
   b) Montrer que : $4S_n = 5^{n+1} - 1$.
   c) Montrer que : $4S_n \equiv a\ (\text{mod } 7) \Leftrightarrow S_n \equiv 2a\ (\text{mod } 7)$.
   d) Déterminer alors le reste modulo **7 de** S_{2015}.

EXERCICE N°3 :

Soit **ABCDEFGH** un cube d'arête **1** . On désigne par **P** le centre de gravité du triangle **HGF** et **Q** le centre de gravité du triangle **FBG** et on muni l'espace du repère orthonormé direct

(A , $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$).

1) **a)** Donner une représentation paramétrique de la droite **(BH).**
   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan **(ACF)** est : **- x + y + z = 0.**
   c) Déterminer les points **W** de la droite **(BH)** tel que le volume du tétraèdre **ACFW** est égale à $\frac{11}{6}$ **.**
2) Soit **K** le milieu de **[FG]** et h l'homothétie de centre **K** et de rapport $\frac{1}{3}$ **.**
   a) Montrer que : **h (H) = P et h (B) = Q.**
   b) Donner l'expression analytique de l'homothétie **h.**
3) Soit le plan **R : - x + y + z -** $\frac{1}{3}$ **= 0 .**
   a) Montrer que l'image du plan **(ACF)** par **h** est le plan **R.**
   b) Vérifier que la droite **(BH)** est perpendiculaire au plan **(ACF)** et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection **N.**
   c) En déduire que le plan **R** est perpendiculaire à la droite **(PQ)** en un point **N'** que l'on déterminera.
4) Soit **S** l'ensemble des points M (x, y, z) tel que : $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 5 = 0$**.**
   a) Montrer que **S** est une sphère dont on précisera le centre **I** et le rayon **R**.
   b) Etudier la position relative de **S** et le plan **(ACF)** .
   c) Déterminer **S' = h (S)** et en déduire la position relative de **S'** et le plan **R** .

EXERCICE N° 4 : Soit **f** la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$.

1) Vérifier que le domaine de définition de **f** est **] 0 , +∞ [.**
2) Soit **g** la fonction définie sur **] 0 , +∞ [** par : $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$.
   a) Etudier les variations de **g**.
   b) En déduire que l'équation **g (x) = 0** admet une solution unique $\alpha \in]0.79 , 0.8[$.
   c) En déduire le signe de **g (x)** .
3) **a)** Montrer que : $\lim_{0^+} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.(on pourra poser $X = \frac{2}{x}$).
   b) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{2}{x}}\, g(\frac{1}{x})}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}$ et que $f(\frac{1}{\alpha}) = \sqrt{\dfrac{1}{\alpha - \alpha^2}}$.
   c) Dresser le tableau de variation de **f**.
4) **a)** Etudier la position relative de la courbe **(** φ **)** de **f** et la droite $\Delta : y = x$.
   b) Etudier la branche à l' infini de **(** φ **)** et tracer **(** φ **)** et la droite Δ dans un repère orthonormée (o , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) .
5) Soit **h** la restriction de **f** à l'intervalle $I =]\frac{1}{\alpha} , +\infty[$.
   a) Montrer que **h** réalise une bijection de **I** sur un intervalle **J** que l'on déterminera.
   b) Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère (o , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) .
6) Soit **U** la suite réelle définie par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, $n \in IN$.
   a) Montrer que : $\forall n \in IN$, on a : $\frac{2}{\ln 2} \leq U_n \leq 4$.
   b) Etudier la monotonie de la suite **U**. En déduire que **U** est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE N° 5 :

Soit $\mathbf{n} \in \mathbf{IN}^*$ **et** $\mathbf{F_n}$ la fonction définie sur **] 0 , +∞ [** par : $F_n(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^n}\, dt$.

1) Montrer que **:** $\forall\ n \in IN^*$; F_n est strictement croissante sur **] 0 , +∞ [.**

2) a) Montrer que : **si** $1 \le t \le x$ **alors** $\frac{e^t}{x^n} \le \frac{e^t}{t^n} \le e^t$ **.**

b) En déduire que : $\forall\ x \ge 1$ on a : $\frac{e^x - e}{x^n} \le F_n(x) \le e^x - e$.

c) Calculer alors : $\lim\limits_{+\infty} F_n$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F_n(x)}{x}$ **.**

3) a) Montrer que : **si** $0 < t \le 1$ **alors** $\frac{1}{t} \le \frac{e^t}{t^n}$ **.**

b) En déduire que : $\forall\ x \in]0, 1]$ on a : $F_n(x) \le \ln(x)$. En déduire $\lim\limits_{0^+} F_n$ **.**

4) a) Montrer que $\mathbf{F_n}$ réalise une bijection de **] 0 , +∞ [** sur **IR**.

b) Etudier la dérivabilité de F_n^{-1} sur **IR** et calculer $(F_n^{-1})'(0)$**.**

5) Pour tout entier naturel **n** on pose : $V_n = F_n(\ln 3)$**.**

a) Montrer que : $\forall n \in IN$ **, on a :** $0 \le V_n \le \frac{3}{n-1}\left(1 - \frac{1}{(\ln 3)^{n-1}}\right)$**.**

b) Calculer alors la limite de la suite **V.**

c) Montrer en faisant une intégration par parties sur V_n que :

$$\forall n \ge 2 \text{ on a : } V_n - n V_{n+1} = \frac{3}{(\ln 3)^n} - e.$$

d) Calculer alors **:** $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) V_{n+1}$**.**

BON TRAVAIL