L-S-IBN SINA 2 heures	Devoir de contrôle N°2	PROF :Meddeb –A Class : 4sc-exp

Exercice N°1: (2 points)

1) Calculer a= $(\sqrt[3]{5\sqrt{5}})^2$ b= $\dfrac{\sqrt[6]{3^{12}}}{\sqrt[5]{9^5}}$

2) Déterminer la fonction dérivée f ' de la fonction f définie sur]0 ; +∞[dans chacun des cas suivants :

a) f(x)= $\sqrt[3]{x}$ b) f(x)= $\sqrt[3]{x^2}$

Exercice N°2: (7 points)

Soit f une fonction définie sur [0 ; +∞[par f(x)= $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$

A- 1) Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$; interpréter graphiquement le résultat.

2) Montrer que f est dérivable sur]0 ; + ∞[et que f '(x)= $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$

3) Dresser le tableau de variation de f .

B- 1) Montrer que f admet une unique primitive F sur [0 ; +∞[qui s'annule en 0.

2)Soit G la fonction définie sur [0 ; $\dfrac{\pi}{2}$[par : G(x)=F ($\tan^2$x).

a) Montrer que G est dérivable sur [0 ; $\dfrac{\pi}{2}$[.

b) Montrer que G(x)= 4 tan x – 4 x ; $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}^-} G(x)$; déduire $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)$

3)a) Dresser le tableau de variation de F.

b) Montrer que F réalise une bijection de [0 ; $+\infty$ [sur un intervalle que l'on précisera.

C- 1) Montrer que pour tout $n \in IN$ il existe un unique réel α_n tel que F (α_n) = n.

2) Montrer que α_n est une suite croissante et divergente.

Exercice N°3 : (6points)

Soit h une fonction définie sur]0 ; 1]   par : h (x)= $\dfrac{1}{1-\cos\pi x}$.

1) Montrer que h est dérivable sur]0 ; 1] et que h'(x) = $\dfrac{-\pi\sin\pi x}{(1-\cos\pi x)^2}$
2) Dresser le tableau de variation de h .
3) Tracer la courbe de h dans un repère orthogonal (o ; I ; J).
4) a) Montrer que h réalise une bijection de] 0 ; 1] sur un intervalle que l'on précisera.

   b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur] $\dfrac{1}{2};+\infty$[; et que $(h^{-1})'$ (x)= $\dfrac{-1}{\pi x\sqrt{2x-1}}$

   c) Tracer dans le même repère la courbe de h^{-1}.
5) prouver que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\pi x\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2}$

Exercice N°4 : (5 points)

l'espace étant rapporté à un repère orthonormé directe (O ; I ; J ; K) ; on considère les points

A (2 ;0 ;0) ; B(0 ;4 ;0) et C(0 ; 0 ; 4)

1) a) vérifier que les points O ; A ; B et C ne sont pas coplanaires.
   b) calculer le volume du tétraèdre OABC.
   c) Déduire la distance du point O et le plan (ABC).
2) on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC] et par P l'ensemble de points M de l'espace tels que MI=MJ
   a) Montrer que P est le plan d'équation 2x – 4 z + 3 = 0.
   b) Montrer que (OC) coupe le plan P en un point K dont on déterminera les coordonnées.
3) Soit S l'ensemble de points M(x ; y ; z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{3}{2}z - 5 = 0$
   a) Montrer que S est la sphère de centre K dont on déterminera le rayon.
   b) Vérifier que les points I et J appartiennent à la sphère S.
   c) Déduire l'intersection du sphère et le plan P.