Mathématiques	Devoir de contrôle N°2	
Lycée Takelsa		
Classe :4 ème Sc.Exp 1 Date : le 16/02/2016	Durée : 2 h	Prof : Ziadi Mourad

Exercice N :1 (03pts)

Identifier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

1) La valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}\ dx$ est égale :

   a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{3}{16}$

2) ABC est un triangle équilatéral de côté ($a \in \mathbb{R}_+^*$) , alors $\left\|\overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB})\right\|$ est égale à :

   a) $\frac{a^3}{2}$; b) 0 ; c) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

3) Soit f la fonction définie sur $[-2\,,2]$ par : $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ et F la primitive de f sur $[-2\,,2]$ qui s'annule en 0. Alors F est :

   a) paire ; b) impaire ; c) ni paire, ni impaire

Exercice N :2 (06pts)

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$;et $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$; $n \geq 1$

1) Calculer I_0 .
2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.
   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.
3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{x^2+1}\ \ dx \quad .$$

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $(2n+3)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)I_n$.

   c) Calculer, alors l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$.

Exercice N :3(06pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ .On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (**unité graphique : 2cm**).

1) a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ .Interpréter géométriquement ce résultat.
   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement ce résultat.
2) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de f .
   c) Tracer $\mathcal{C}_f$.
3) Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0. On pose : $G(x)=F(tan^2x)$ pour tout $x\ de\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x\ de\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G'(x)=4tan^2x$.

   b) Calculer (0) . En déduire $G(x)$.

   c) Déterminer , alors l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Exercice N :4(05pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ .On considère les points A(4,0,0) ; B(0,4,0) et C (0,0,4).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b) Déduire que les points A , B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-4=0$.
   c) Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $8\sqrt{3}$.
2) Soit le point G $(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$.
   a) Montrer que le point G est le centre de gravité du triangle ABC.
   b) Montrer que [OG] est la hauteur issue de O du tétraèdre OABC.
3) On donne les points I , J et K milieux respectifs des segments [AC] ; [AB] et [BC].
   a) Justifier que $\overrightarrow{KI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et que $\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire l'aire du triangle IJK.
4) On désigne respectivement par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ les volumes des tétraèdres OABC et OIJK.
   Montrer que $\mathcal{V}'=\frac{1}{4}\mathcal{V}$.

BON TRAVAIL