EXERCICE ❶

3 pts

QCM choisir la bonne réponse (sans justification)

1. l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z-i| = |\overline{z}+2+3i|$

   ❒ cercle ❒ droite ❒ vide .

2. l'équation $z^2-(1+3i)z-2+2i=0$ possède $2i$ et

   ❒ $-1+i$ ❒ $1+i$ ❒ $1-i$.

3. Soit $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$ sur $[1;+\infty[$, alors $g\circ f(x)=$

   ❒ x ❒ $|x|$ ❒ $-x$.

EXERCICE ❷

8.5 pts

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :$U_0=0$ et $U_{n+1}=\sqrt{1+\frac{1}{4}U_n^2}$.

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Montrer que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n\geq 0$,$0\leq U_n\leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
   (b) Montrer que la suite U est croissante.
   (c) Déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.
3. Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n=U_n^2-\frac{3}{4}$.
   (a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et calculer $\lim V_n$ et $\lim U_n$
   (c) Soit $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$ .Calculer S_n en fonction de n puis calculer sa limite.
4. Soit T la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :$T_{n+1}=\frac{1}{4}T_n+V_n$ .On pose $H_n=4^nT_n$.
   (a) Montrer que H est une suite arithmétique de raison $r=-\frac{16}{3}$.
   (b) Exprimer H_n puis T_n en fonction de n.

EXERCICE ❸

4.5 pts

Soit i tel que $i^2 = -1$ et $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

1. Donner la forme algébrique de $\sigma = ij.$ et montrer que $|\sigma| = 1$
2. Vérifier que $(ij)^{12} = \sigma^{12} = 1$ en déduire σ^{2015} sous forme algébrique.
3. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et soient les points $A(1), B(-1)$ et $M(ij)$
   (a) Placer les points A, B et M
   (b) Montrer que $(\overline{\sigma} + 1)(\sigma - 1)$ est imaginaire pur .
   (c) Quelle est la nature du triangle AMB.

EXERCICE ❹

4 pts

On considére dans $\mathbb{C}$ l'équation (E):$z^2 - (2 + 5i)z - (7 + i) = 0$

1. Calculer $(4 + 3i)^2$.
2. Résoudre l'équation (E).
3. Soit (E') : $z^3 - (1 + 5i)z^2 - (9 + 6i)z - (7 + i) = 0$.
   (a) vérifier que $z^3 - (1 + 5i)z^2 - (9 + 6i)z - (7 + i) = (z + 1)(z^2 - (2 + 5i)z - (7 + i))$.
   (b) Déduire la résolution de (E') .