

Lycée Tahar Sfar Mahdia	Devoir de Synthèse n° 2 Mathématiques	Niveau : 2 ^{ème} Sc
Date : 06 / 03 / 2012	Prof : Meddeb Tarak	Durée : 2 heures

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (7 pts)

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1 \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

1) a/ Calculer U_1 et U_2 .

b/ Vérifier que la suite U n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) On pose, pour tout $n \in IN$, $V_n = U_n + n + 1$.

a/ Calculer V_0 et V_1 .

b/ Montrer que V est une suite géométrique de raison 3.

c/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

3) On pose, pour tout $n \geq 2$, $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$,
et $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

Exprimer S_n et S'_n en fonction de n .

Exercice n°2 : (6 pts)

Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct tel que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$, et O le milieu de $[BC]$.

1) a/ Construire le point I image de B par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b/ Soit \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon OA . Vérifier que \mathcal{C} passe par les points B, C et I .

2) a/ Montrer que $\widehat{AIC} = \frac{\pi}{3}$.

b/ Montrer alors que le triangle AIC est équilatéral.

3) Soit R la rotation indirecte de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a/ Déterminer $R(A)$ et $R(B)$.

b/ Construire le point C' image de C par R .

c/ Montrer que (BC) et (CC') sont perpendiculaires.

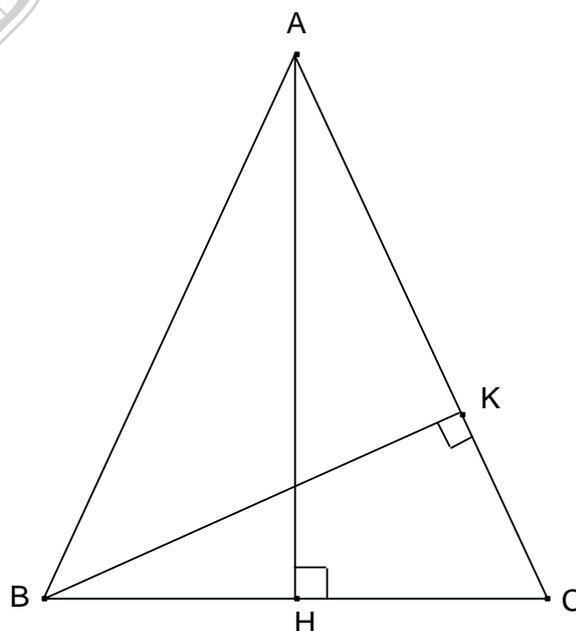
4) a/ Montrer que les triangles ABC et COC' sont isométriques.

b/ Montrer que les points I, C, C' et O sont situés sur un même cercle \mathcal{C}' que l'on précisera.

Exercice n°3 : (7 pts)

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principale A , et H le milieu de $[BC]$, soit K le pied de la hauteur issue de B . (voir figure)

- 1) Montrer que $\widehat{BAH} = \widehat{CBK}$.
- 2) On pose : $AB = 4$ et $\widehat{BAH} = \alpha$, soit donc $\widehat{BAC} = 2\alpha$.
 - a/ Montrer que : $BC = 8 \sin \alpha$, puis $BK = 8 \sin \alpha \cos \alpha$.
 - b/ Exprimer BK en fonction de $\sin(2\alpha)$.
 - c/ En déduire que : $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.
- 3) a/ Exprimer AK en fonction de $\cos(2\alpha)$.
 - b/ Montrer que : $CK = 8 \sin^2 \alpha$.
 - c/ En remarquant que $AK + CK = AC = 4$, montrer que : $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.
puis montrer que : $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$.
- 4) Soit a un réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
 - a/ Calculer $\cos(2a)$, en déduire que : $a = \frac{\pi}{8}$.
 - b/ Calculer $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\cos \frac{5\pi}{8}$.



Bonne chance