Exercice 1

1/ a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés et par suite ils déterminent un plan $P=(ABC)$.

b) $\overrightarrow{N_P}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan *P*. On a $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $P: x+y+z+d=0$.

$A(1,1,0)\in P$ donc $d=-2$ et enfin $P: x+y+z-2=0$.

Ou bien : $\left.\begin{array}{l}x_A+y_A+z_A-2=1+1-2=0\\ x_B+y_B+z_B-2=1-1+2-2=0\\ x_C+y_C+z_C-2=0+1+1-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow x+y+z-2=0$ est une équation cartésienne de *P* puisque les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

c) $x_D+y_D+z_D-2=1+1+4-2=4\neq0$ donc $D\notin P$.

2/ a) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ d'où le triangle *ABC* est rectangle en *C*.

b) $[AB]$ est l'hypoténuse du triangle *ABC* donc le milieu *H* du segment $[AB]$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle *ABC*.

3/ La droite Δ étant perpendiculaire au plan *P* donc $\overrightarrow{N_P}$ est un vecteur directeur de Δ.

$H(1,0,1)\in\Delta$ donc $\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases};\alpha\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de Δ.

4/ a) Δ étant une droite perpendiculaire au plan *P* du cercle $\mathscr{C}$ en son centre *H* cela fait que Δ est l'axe du cercle $\mathscr{C}$. $M\in\Delta$ donc *M* est équidistant de tous les points de $\mathscr{C}$. En particulier $MA=MB=MC$.
On peut procéder autrement :
$M(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$; $\alpha\in\mathbb{R}$. Le calcul donne $MA=MB=MC=\sqrt{3\alpha^2+2}$.

b) On désigne par *Q* le plan médiateur du segment $[AD]$. On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

La droite Δ et le plan *Q* sont sécants car $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{N_P}=4\neq0$. Soit *I* leur point d'intersection.
Il est clair que $IA=ID$ (propriété du plan médiateur). $I(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$, $IA=ID\Leftrightarrow IA^2=ID^2$
$\Leftrightarrow 3\alpha^2+2=\alpha^2+(\alpha-1)^2+(\alpha-3)^2 \Leftrightarrow 2=-8\alpha+10\Leftrightarrow\alpha=1$ Donc $I(2,1,2)$.

c) $IA=IB=IC$ car $I\in\Delta$ et $IA=ID$ donc $IA=IB=IC=ID$ ce qui permet de conclure que le point *I* est le centre de la sphère (*S*) circonscrite au tétraèdre *ABCD*. Le rayon de (*S*) est $R=IA=\sqrt{3\alpha^2+2}$ avec $\alpha=1$.
Ainsi $R=\sqrt{5}$.

Exercice 2

1/ a) $OA=|a|=\sqrt{1+\sqrt{2}^2}=\sqrt{3}$ donc $A\in(C)$.

b) $A\in(C)$, A est un point de la droite d'équation $x=1$ (car $\mathrm{Re}(a)=1$) et $y_A>0$ d'où la construction de A.

2/ a) $\Delta=\left(-2i\sqrt{3}\right)^2-4.1.\left(-6i\sqrt{2}\right)=-12+24\sqrt{2}i=12\left(-1+2\sqrt{2}i\right)=12\left(1^2+2.1.\sqrt{2}i+\left(\sqrt{2}i\right)^2\right)=12a^2$.

b) On pose $\delta^2=\Delta$. δ est une racine carrée de Δ.

$\delta=2\sqrt{3}a=2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)$ donc les solutions de (E) sont

$$z'=\frac{2i\sqrt{3}-2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2}=\sqrt{3}\left(i-1-i\sqrt{2}\right)=z_1 \quad \text{et } z''=\frac{2i\sqrt{3}+2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2}=\sqrt{3}\left(i+1+i\sqrt{2}\right)=z_2.$$

3/ a) $\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{-\left(\dfrac{-2i\sqrt{3}}{1}\right)}{2}=i\sqrt{3}=z_K$ cela signifie que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) $\dfrac{z_2-z_1}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}+2i\sqrt{6}}{1+i\sqrt{2}}=2\sqrt{3}$

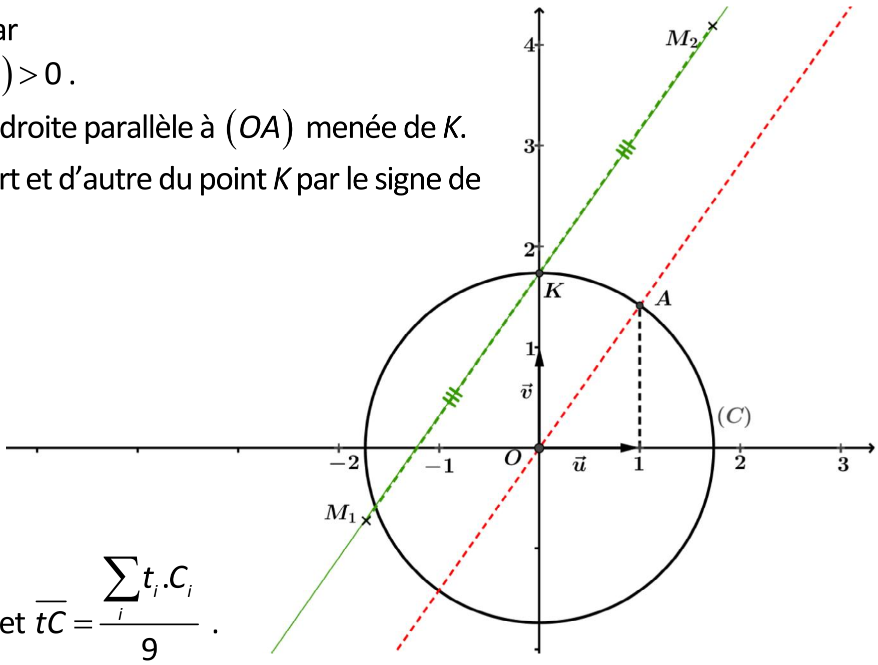
$\dfrac{z_{\overrightarrow{M_1M_2}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}=\dfrac{z_2-z_1}{a}=2\sqrt{3}\in\mathbb{R}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires ce qui entraine que $(M_1M_2)//(OA)$.

c) $M_1M_2=|z_2-z_1|=2\sqrt{3}|a|$ car $\dfrac{z_2-z_1}{a}=2\sqrt{3}$ donc $M_1M_2=2\sqrt{3}.\sqrt{3}=6$.

d) La construction de K est immédiate car $K\in(C)$, z_K est imaginaire pur et $\mathrm{Im}(z_K)>0$.

Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) menée de K.

$KM_1=KM_2=3$. On les distingue de part et d'autre du point K par le signe de la partie imaginaire de z_1 et celle de z_2 .



Exercice 3

1/ a) $r=\dfrac{Cov(t,C)}{\sigma_t.\sigma_C}$; $Cov(t,C)=\overline{t.C}-\bar{t}.\bar{C}$ et $\overline{tC}=\dfrac{\sum_i t_i.C_i}{9}$.

Soit alors $r=0,99998$ (valeur approchée par défaut) ou encore $r=0,99999$ (valeur approchée par excès).

b) $|r|$ est assez proche de 1 donc un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est fortement justifié.

c) $C=at+b$ où $a=\dfrac{Cov(t,C)}{V(t)}=\dfrac{Cov(t,C)}{\sigma_t^{\,2}}$ et $b=\bar{C}-a.\bar{t}$ .La calculatrice affiche $a=23,19$ et $b=1,68$.

La droite de régression de C en t est d'équation $y = 23;19x + 1,68$.

d) Pour $t = 188; C = 23,19 \times 188 + 1,68 \simeq 4361$ (arrondi à l'unité).

2/ a) $C = \alpha t + 40\beta + 754$.

b) D'après **1/**c), on a $\alpha = 23,19$ et $40\beta + 754 = 1,68$ donc $\beta = \dfrac{1,68 - 754}{40} = -18,808$.

3/ $t = 188$ cm et $g = 50 \Rightarrow C = 23,19.188 - 18,808.50 + 754$ Soit alors $C = 4173$ cm^3 (arrondi à l'unité).

Exercice 4

1/ a) On peut écrire $f(x) = x + \left(-\dfrac{1}{x}\right).\ln x$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ donc $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

b) Il s'agit d'interpréter graphiquement les résultats de **1/**a).

- $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$ donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = 0$ donc la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

c) La position de (C) par rapport à la droite $\Delta : y = x$ dépend du signe de $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0,+\infty[$ donc du signe de $-\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	$+$	0	$-$	
(C) est	‖	au-dessus de Δ		au-dessous de Δ	

(C) coupe au point $(1,1)$.

2/ a) $\forall x > 0, f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x}.x - \ln x.1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$.

b) Pour $x \in]0,1[, x^2 - 1 < 0$ et $\ln x < \ln 1 = 0$.

Pour $x \in]1,+\infty[, x^2 - 1 > 0$ et $\ln x > \ln 1 = 0$.

On peut donc affirmer que $x^2 - 1$ et $\ln x$ ont le même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

c) D'après **2/**b), le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 1$ donc on a le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

d) Soit $N(x) = x^2 - 1 + \ln x$. On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow N(x) = 0$.

$N'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ d'où le tableau de variation ci-dessous :

x	0		$+\infty$
$N(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction N est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $N(x)=0$ admet une unique solution et comme $N(1)=0$ alors 1 est l'unique solution de l'équation $N(x)=0$ donc de $f'(x)=0$.

e) Tableau de variation de la fonction *f*.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3/ a) $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C) en un point d'abscisse *a*.

La tangente est parallèle à $\Delta: y=x$ équivaut à $f'(x)=1 \Leftrightarrow a^2-1+\ln a=a^2 \Leftrightarrow \ln a=1 \Leftrightarrow a=e$.

$f(e)=e-\dfrac{1}{e}$.

La courbe (C) admet donc au point $B\left(e, e-\dfrac{1}{e}\right)$ la seule tangente *D* parallèle à la droite $\Delta: y=x$.

b) $D: y=1.(x-e)+e-\dfrac{1}{e}$ donc $D: y=x-\dfrac{1}{e}$.

4/ a) A l'aide du compas et étant connue la distance $\dfrac{1}{e}$, on place le point $A\left(\dfrac{1}{e},0\right)$.

$x_A-\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}=0=y_A$ donc $A\in D$.

b) *D* est la droite passant par le point *A* et parallèle à Δ.
B est le point de la droite *D* d'abscisse e.
c) Voir schéma.

5/ $\mathscr{A}=\displaystyle\int_{1/e}^{e}\left|f(x)-x\right|dx=\int_{1/e}^{1}\left(f(x)-x\right)dx+\int_{1}^{e}\left(x-f(x)\right)dx=$

$\displaystyle\int_{1/e}^{1}-\frac{1}{x}.\ln x.dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}.\ln x.dx=\left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{1/e}^{1}+\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{1}^{e}=1\text{ u.a}$