ABDA EZEDDiNE **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2015**	Épreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **4 H** Coefficient : **4**
Section : **Mathématiques**	**Session Principale**

Correction

Exercice 1 (5 points)

1. **a.** $(E): z^2 - 2z + 4 = 0$.

   $\Delta' = 1^2 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$.

   $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ et $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

   b. $z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

   $z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

2. $B\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) \in (\Gamma)$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

   $C\left(2e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)$ est le symétrie de B par rapport l'axe des abscisses.

3. $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

   $Arg\left(\frac{z_N - z_O}{z_M - z_O}\right)[2\pi] = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

   $Arg(z_N) - Arg(z_M)[2\pi] = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

   $Arg(z_N) = \theta + \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

   De plus $N \in (\Gamma)$, alors $|z_N| = 2$.

   Finalement : $z_N = 2e^{\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)i}$.

4. **a.** L'expression complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour forme :

   $z' = az + b$ avec $a = e^{\frac{\pi}{3}i}$ et $b = z_A(1 - a) = 2(1 - e^{\frac{\pi}{3}i})$.

   Ce qui donne que $z' = e^{\frac{\pi}{3}i}z + 2 - 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

   b. Le point F est le milieu de $[BM]$ donc $z_F = \frac{z_B + z_M}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\theta i}$.

   L'image de F par $r_{(A,\frac{\pi}{3})}$ a pour affixe :

   $$z' = e^{\frac{\pi}{3}i}\left(e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\theta i}\right) + 2 - 2e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)i} + 2 - 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

   $$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 2 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + e^{\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + e^{\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} + e^{\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)i}$$

   $$= \frac{z_C + z_N}{2} = z_K.$$

D'où $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(F) = K$.

c. Comme $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(F) = K$, alors $\begin{cases} AF = AK \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AK}}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$.

Et par suite AFK est un triangle équilatéral.

5. a. $AF^2 = \left|e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\theta i} - 2\right|^2 = |(-2 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta) + (\sin\frac{\pi}{3} + \sin\theta)i|^2$

$= (-2 + \frac{1}{2} + \cos\theta)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\theta)^2$

$= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2\times\frac{3}{2}\cos\theta + (\cos\theta)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + (\sin\theta)^2$

$= 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$

$= 4 - 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta)$

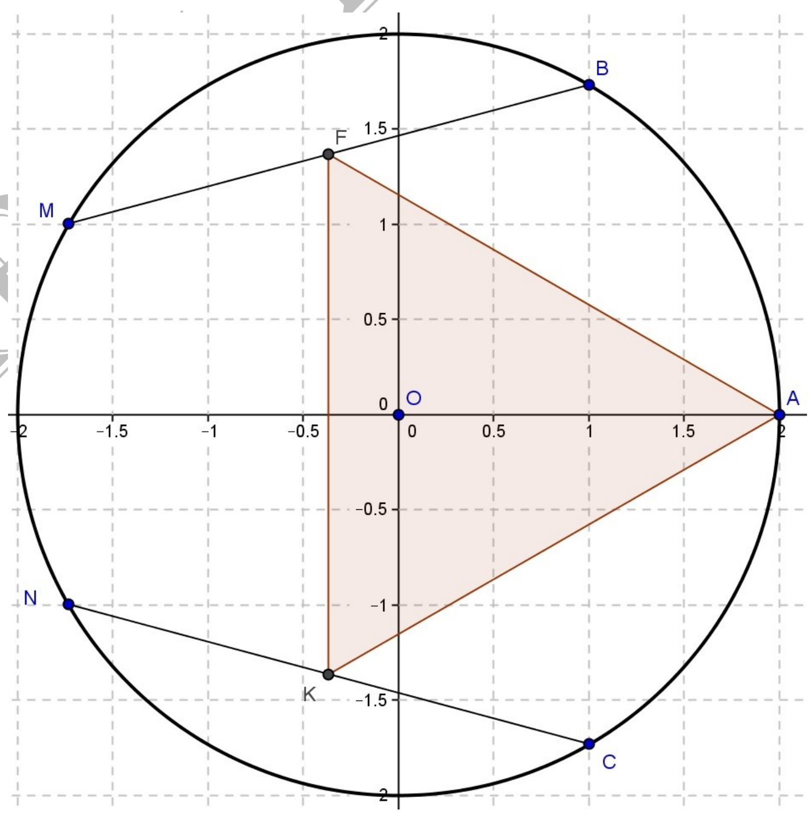
$= 4 - 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta)$

$= 4 - 2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{6} + \theta)$.

b. Pour que AF soit maximale, il faut que $\cos(\frac{\pi}{6} + \theta)$ est minimale.

Or $\cos(\frac{\pi}{6} + \theta)$ est minimale pour $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Ce qui donne que $z_M = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$.



Exercice 2 (4 points)

1. On a $f(A) = A$ et $f(B) = C$.

   Le rapport de f est $\frac{AC}{AB} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. L'angle de f est $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

2. **a.** Le rapport de g est $\frac{AB}{AC} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

   b. L'axe Δ de g est la droite qui porte la bissectrice intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$.

   c. supposons que : $g\big(g(C)\big) = C'$ alors $\overrightarrow{AC'} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

   D'où $C' = D$. Ou encore $g\big(g(C)\big) = D$.

   Finalement $g(B) = D$.

   $g\big(\widehat{ACB}\big) = \widehat{ABD}$ et on a : $\widehat{ABD} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\,\widehat{ABC}$.

   Et par suite $[BD)$ est la bissectrice intérieur de l'angle $\widehat{ABC}$.

3. **a.** $f \circ g$ est la composée d'une similitude directe et une similitude indirecte. Donc $f \circ g$ est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$.

   Et par suite $f \circ g$ est un antidéplacement.

   On a de plus $f \circ g(C) = f(B) = C$ et $f \circ g(A) = f(A) = A$, càd $f \circ g$ fixe deux points .

   Finalement $f \circ g$ est une symétrie axiale d'axe (AC).

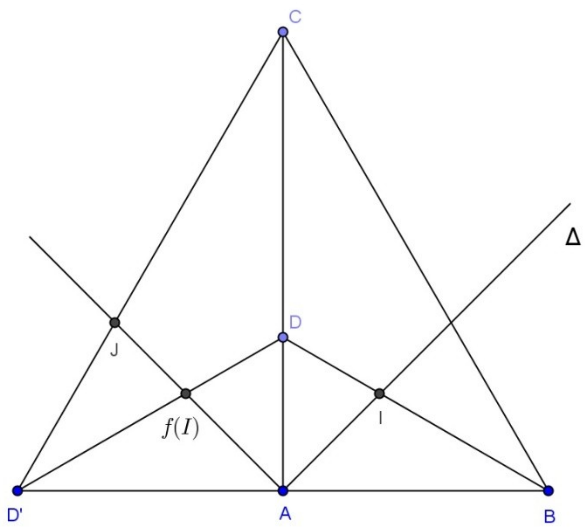
   b. On a $f(D) = D'$ .Ce qui donne que $f \circ g(B) = D'$ .Ou encore $S_{(AC)}(B) = D'$.

   Et comme $(AC) \perp (AB)$, alors $S_A(B) = D'$.

4. $I \in (BD) \cap \Delta$ car (BD) est la droite qui porte la bissectrice qui issue de B et Δ est la droite qui porte la bissectrice qui issue de A.

   $f(I) = f\big(g(I)\big) = S_{(AC)}(I) \in S_{(AC)}((BD)) \cap S_{(AC)}(\Delta)$.

   $\{f(I)\} = (DD') \cap (AJ)$.



Exercice 3 (4 points)

1. **a.** $47 \times (-9) + 53 \times 8 = 1$. D'où $(-9,8)$ est une solution de (E).

   b. On a $\begin{cases} 47 \times (-9) + 53 \times 8 = 1 \\ 47.x + 53.y = 1 \end{cases}$, alors $47(x+9) + 53(y-8) = 0$.

   Ou encore $47(x+9) = -53(y-8)$.

   Comme 47 ne divise pas 53 alors d'après Gauss 47 divise $y-8$.

   On en déduit que $y = 8 + 47k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   $47(x+9) = -53 \times 47k \Longrightarrow x = -9 - 53k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Conclusion : $47.x + 53.y = 1 \ \Rightarrow \begin{cases} x = -9 - 53k \\ y = 8 + 47k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$.

   <u>Réciproquement</u> :

   Si $\begin{cases} x = -9 - 53k \\ y = 8 + 47k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$, alors $47.(-9-53k) + 53.(8+47k) = 1$.

   Donc (x,y) est une solution de (E).

   c. On a $47.x + 53.y = 1$, alors $47.x \equiv 1 \ (mod\ 53)$.

   Et par suite x est l'inverse de 47 modulo 53.

   L'ensemble des inverses de 47 modulo 53 est $\{-9 - 53k \ , k \in \mathbb{Z}\}$.

   d. Pour $k = -1$ on obtient le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

   44 est le plus petit inverse positif de 47 mod 53.

2. **a.** 53 est premier et 53 ne divise pas 45.

   On applique le petit théorème de Fermat, on obtient :

   $45^{53-1} \equiv 1(mod\ 53)$; d'où le résultat.

   b. $45^{106} \equiv (45^{52})^2 \times 45^2 (mod\ 53)$

   $\equiv 45^2 (mod\ 53)$

   $\equiv 11 (mod\ 53)$.

3. **a.** On sait que $(45-1)(1 + 45 + 45^2 + \cdots + 45^{105}) = 45^{106} - 1$.

   Or $45^{106} - 1 \equiv 11 - 1(mod\ 53) \equiv 10(mod\ 53)$.

   D'où $44\ N \equiv 10(mod\ 53)$.

   b. d'après 1)d) on sait que 44 est l'inverse de 47 mod 53

   <u>càd</u> $44 \ \times 47 \equiv 1(mod\ 53)$

   Comme $44\ N \equiv 10(mod\ 53)$, alors :

   $47 \times 44\ N \equiv 47 \times 10(mod\ 53)$

   Ce qui donne :

   $N \equiv 470(mod\ 53) \equiv 46(mod\ 53)$.

   D'où le reste de N modulo 53 est 46.

Exercice 4 (7 points)

I.

1. **a.** $f_1 : x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0,\pi]$. $f_1([0,\pi]) = [0,1]$.

$f_2 : x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $f_1([0,\pi]) = [0,1]$.

D'où f est dérivable sur $[0,\pi]$ et on a :

$f'(x) = \cos x \,.\, e^{\sin x}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	1

b. si $x \in [0,\pi]$ alors $2\frac{\pi}{2} - x \in [0,\pi]$.

$f\left(2\frac{\pi}{2} - x\right) = f(\pi - x) = e^{\sin(\pi - x)} = e^{\sin x} = f(x)$.

D'où $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

c. $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ou encore $(T) : y = x + 1$.

2. **a.** Pour $x \in]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$, $g(x) > 0$. C'est-à-dire l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solutions sur $]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$.

Pour $x \in]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1[$, g continue, strictement décroissante.

$g(]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1[) =]-1, g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})[$, avec $g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) > 0$.

On conclut que g réalise une bijection de $]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1[$ sur $]-1, g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})[$.

Comme $0 \in]-1, g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})[$, alors il existe un unique antécédent $\alpha \in]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Conclusion : $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1[$.

b.

x	0		α		1
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3. **a.** h est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on a :

$h'(x) = \cos x \, e^{\sin x} - 1 = e^{\sin x}\sqrt{1 - \sin^2 x} - 1 = g(\sin x)$.

b. la fonction $x \longmapsto \sin x$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$.

Et comme $\alpha \in [0,1]$, alors il existe un unique $\beta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin\beta = \alpha$.

c. $\sin([0,\beta]) = [0,\alpha]$ et $\sin\left(\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]\right) = [\alpha, 1]$.

d.

x	0		β		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(\beta)$	$\searrow$	$e-\frac{\pi}{2}-1 = 0{,}147$

e. D'après le tableau de variation de h on a : $h(x) \geq 0$ ou encore $f(x) \geq x+1$, pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de (T).

II.

1. **a.** posons la fonction $\varphi(x) = x - \sin x$, pour tout $x \geq 0$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\varphi'(x) = 1 - \cos x \geq 0$.

Il est clair alors que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Et par suite $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

Ou encore $x \geq \sin x$, pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

b. On a : pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leq x$, alors $e^{\sin x} \leq e^x$.

D'où $f(x) \leq e^x$, pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

2. **a.** On a : $f(x) \leq e^x$, pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}] \Longrightarrow \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 e^x dx$.

D'où $\int_0^1 f(x)dx \leq e^1 - e^0 = e - 1$.

D'après I)1)a) $f(x) \leq e$, pour tout $x \in [0,\pi] \Longrightarrow \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} e\, dx$.

D'où $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e(\frac{\pi}{2} - 1)$.

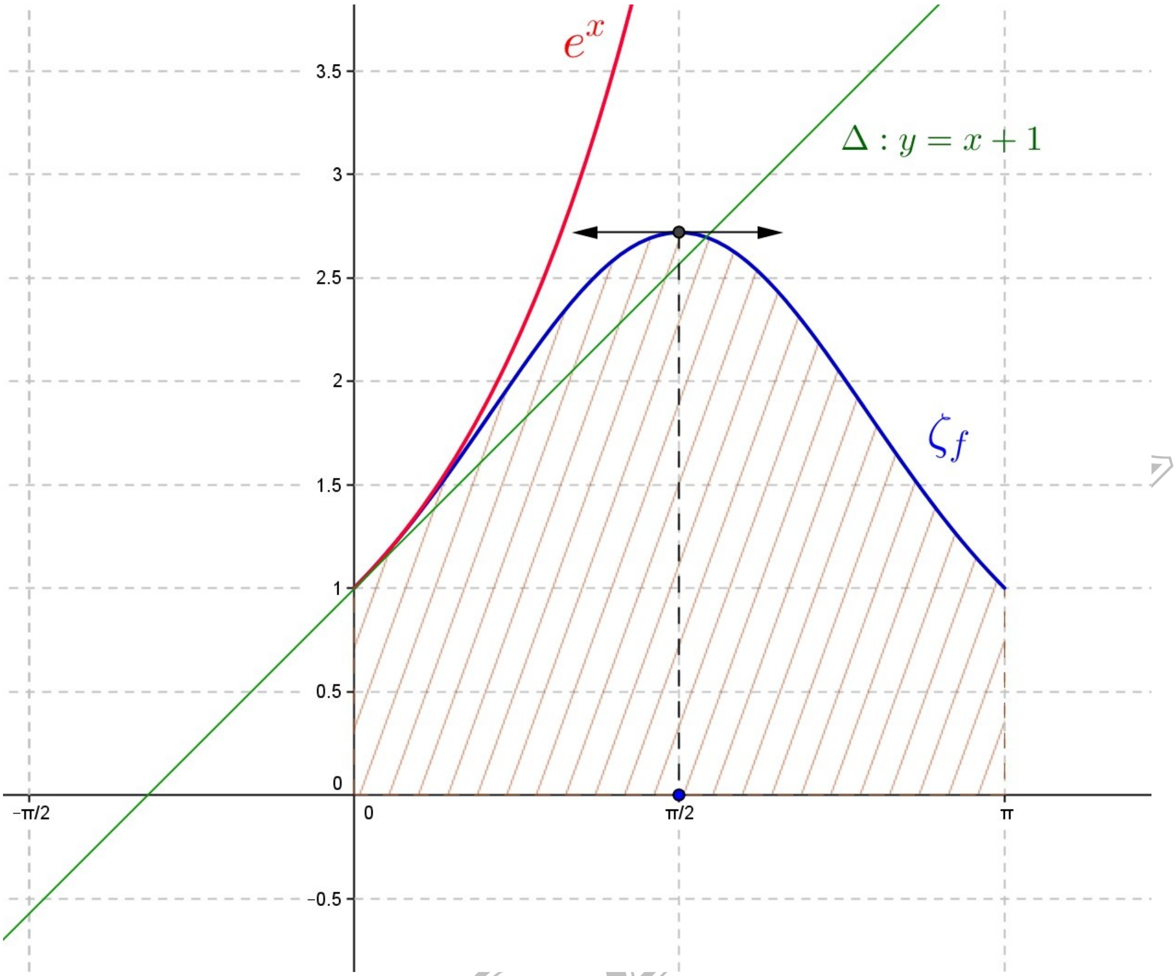
b. Δ: $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

D'où $\mathcal{A} = \int_0^{\pi} f(x)dx = 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq 2\left(e\frac{\pi}{2} - e + e - 1\right) = e\pi - 2$.

D'autre part : $f(x) \geq x + 1$, pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$,

$\mathcal{A} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \geq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x + 1\, dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} + \pi$

Finalement : $\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq \mathcal{A} \leq e\pi - 2$.


e^x
$\Delta : y = x + 1$
ζ_f
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−π/2
0
π/2
π