

Date : 10/12/2014

Devoir de synthèse N°1

Niveau: 4<sup>ème</sup> info

Nombre de pages : 2

Durée : 2h

**MATHEMATIQUES**N.B : L'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée, cependant son échange est strictement interdit.**EXERCICE N° 1 ( 3 pts)**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est juste. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie (aucune justification n'est demandée) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ .

1) Soit  $z$  un nombre complexe,  $|z-2|$  est égal à :

a.  $|z| + 2$

b.  $|\bar{z} + 2|$

c.  $|\bar{z} - 2|$  .

2) Si A et B sont les points dont les affixes sont les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $250z^2 - 1000iz + 1014 - 11015i = 0$ , alors le milieu de  $[AB]$  est :

a.  $K(0 ; 2)$

b.  $K(2 ; 0)$

c.  $K(0 ; -2)$  .

3) L'ensemble des points  $M(z)$  tel que  $|z| = |\bar{z} - 2i|$  est :

a. la droite  $y=1$ b. la droite  $y=-1$ 

c. le cercle de centre O et de rayon 2

**EXERCICE N° 2 ( 6 pts)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  et  $\zeta$  sa courbe dans un

repère orthonormé  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ . On admet que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement .

b) Déterminer  $f(\mathbb{R})$ .

2) Montrer que le point  $I(0 ; 1)$  est un point de  $\zeta$  et qu'il est un centre de symétrie de  $\zeta$  .

3)a) Montrer que la fonction définie par  $g(x) = f(x) + x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

b) En déduire que l'équation  $f(x) = -x$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$  , puis que  $-1 < \alpha < 0$ .

c) Vérifier que  $\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha+1}$ .

4) Montrer que les droites  $\Delta : y = x$  et  $\Delta' : y = x+2$  sont deux asymptotes obliques à la courbe  $\zeta'$  de la fonction  $g$ .

### **EXERCICE N° 3 ( 5 pts)**

On considère la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{(n+1)}{2n} \cdot u_n \end{cases} .$$

- 1) Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
- 2) a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$  ;  $u_n > 0$ .  
b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
c) En déduire que  $(u_n)$  est convergente.
- 3) Soit la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $v_n = \frac{u_n}{n}$ .  
a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison  $q$  et le premier terme  $v_1$ .  
b) En déduire que pour tout  $n \geq 1$  ;  $u_n = \frac{n}{2^n}$ .

### **EXERCICE N° 4 ( 6 pts)**

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  ;  $2^{3n} - 1$  est divisible par 7.  
(on pourra raisonner par récurrence)  
b) En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  est divisible par 7 et que  $2^{3n+2} - 4$  est divisible par 7 .
- 2) Soit  $p$  un entier naturel , donner le reste de la division euclidienne de  $2^p$  par 7 dans les trois cas suivant :
  - a)  $p=3n$  ;  $n \in \mathbb{N}$
  - b)  $p=3n+1$ ;  $n \in \mathbb{N}$
  - c)  $p=3n+2$  ;  $n \in \mathbb{N}$
- 3) Soit  $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$ . Montrer que  $A_p$  est divisible par 7 si et seulement si  $p= 3n+1$  ou  $p = 3n+2$  ;  $n \in \mathbb{N}$ .
- 4) Soit  $a = 1000100010000$  écrit dans le système binaire (base 2).
  - a) Montrer que dans la base 10  $a$  s'écrit sous la forme  $A_p$  .
  - b) En déduire que  $a$  est divisible par 7.