L-Mateur
Classe : $4SC_1$

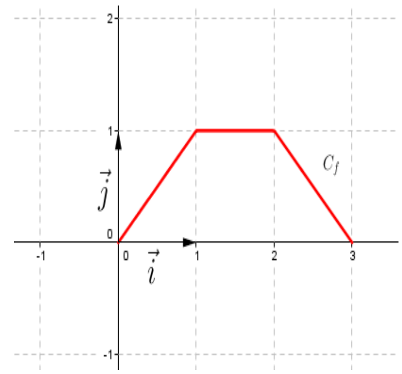
Devoir de contrôle n°2
Durée : $2h$

Prof :Talbi Rachid
Le 07 / 02 / 2014

EXERCICE 1 ($3pts$)

Soit la fonction f dont la représentation graphique est C_f donneé ci-dessous et F la primitive de f sur $[0,3]$ qui s'annule en 0.

Répondre par vrai ou faux



1) F n'est pas dérivable en 1 et 2.
2) F est décroissante sur $[0,3]$
3) Si $x \in [0,1]$ alors $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$
4) Si $x \in [1,2]$ alors $F(x) = x - \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 2 ($6pts$)

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2-1} + x$

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   (b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat obtenu.

   (a) Montrer que f dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.

   (a) Montrer que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote oblique à C_f.
   (b) Tracer C_f dans un repère orthonormé$\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

   (a) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Montrer que $\forall\ x \in J$ on a: $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$
   (c) Tracer $C_{f^{-1}}$dans le même repère.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par: $g(x) = f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

   (a) Montrer que $\forall\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[: g(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$
   (b) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
   (c) Montrer que g^{-1}est dérivable sur K et $\forall\ x \in K : \left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

www.devoirat.net 2015

EXERCICE 3 ($6pts$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1. (a) Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
   Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.On pose $G(x) = F(x) + F(-x)$
   (b) Montrer que $G(x) = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$
   (c) En déduire la parité de F.

2. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = F\left(-\dfrac{1}{x}\right)$
   (a) Démontrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $F(x) = 2F(1) - F(\dfrac{1}{x})$, $\forall\ x \in\ ]0, +\infty[$
   (c) Calculer alors $l = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

3. Soit h la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = F(\tan x)$.
   (a) Calculer $h'(x)$.
   (b) En déduire que $h(x) = x$,$\forall\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
   (c) Calculer $F(1)$
   (d) En déduire la valeur l.

EXERCICE 4 ($5pts$)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormée direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.On considère les points $A\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ $B(1,0,1)$; $C(0,0,2)$ et $D(-1,-2,2)$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$
   (b) Montrer que les points B, C et D définissent un plan $P : 2x - y + 2z - 4 = 0$.
   (c) Calculer l'aire du triangle BCD.

   (a) Calculer $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}$.
   (b) En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   (c) Calculer alors le volume ν du tétraèdre $ABCD$.

   (a) Montrer que le point $H\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{6}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P.
   (b) Montrer que,dans le plan P, H est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD.

BON TRAVAIL

www.devoirat.net 2015

www.devoirat.net 2015