LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: SALAH HANNACHI
« 3^{EME}MATHS »

2012/2013
SERIE D'EXERCICES
DIVISIBILITE DANS IN-NOMBRES PREMIERS

EXERCICE N1 :

Résoudre dans IN^2 dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} a^2+b^2=4625 \\ a \vee b = 440 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a \wedge b = a-b \\ a \vee b = 72 \end{cases}$; c) $a \vee b - a \wedge b = 8$

EXERCICE N2:

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que b soit impaire et que 7 ne divise pas b.

1) Montrer que les entiers 2 et b sont premiers entre eux.

2) Montrer que si 14 divise a.b alors 7 divise a.

3) En déduire que si 14 divise a.b alors 14 divise a^2.

EXERCICE N3:

1) Soit p un nombre premier différent de 3. Montrer, à l'aide du petit théorème de Fermat, que pour tout entier naturel n, on a : $3^{n+p}-3^{n+1}$ est divisible par p.

2) Déterminer les nombres premiers p tels que p divise 8^p+20

3) a) A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout x$\in IN^*$ on a :

$(x+1)^{13}-1$ est divisible par x

b) En déduire que pour tout entier naturel a, on a : $a^{13}-a$ est pair.

c) Montrer alors que $a^{13}-a$ est divisible par 26.

EXERCICE N4:

1) Vérifier que 2047 n'est pas un nombre premier.

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls distincts.

a) Vérifier que $2^{pq}=[(2^p-1)+1]^q$

b) En déduire que 2^p-1 divise $2^{pq}-1$

c) Vérifier de même que 2^q-1 divise $2^{pq}-1$

3) On appelle nombre de MERSENNE tout nombre de la forme 2^n-1 où n est un entier naturel ≥ 2.

a) Vérifier que 2047 est un nombre de MERSENNE.

b) Montrer que si 2^n-1 est premier alors n est premier. (On pourra raisonner par l'absurde)

c) A-t-on si n est premier alors 2^n-1 est premier ? Justifier la réponse.

EXERCICE N5:

I/ Montrer par récurrence que l'entier $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ est divisible par 7.

II/ 1) Soit n $\in$IN. Montrer que n est divisible par 14 si et seulement si n est divisible par 7 et 2.

2) Montrer que n^7-n est divisible par 14

3) Déterminer le reste de la division euclidienne de 32009^7-1430 par 14.

EXERCICE N6:

Soit p un entier naturel non nul distinct de 1.

Montrer que si p divise (n-1)!+1 Alors p est premier. (On pourra raisonner par l'absurde)

EXERCICE N7:

1) Soit n∈IN\{0,1}. Montrer que les entiers naturels suivants ne sont pas premiers :

n!+2 ; n!+3 ; …… ; n!+n.

2) Donner alors 100 entiers naturels non premiers consécutifs.

EXERCICE N8:

Soit p un entier naturel premier.

1) Vérifier que pour tout entier naturel k tel que 0<k<p, on a : $k.C_p^k = p.C_{p-1}^{k-1}$

2) En déduire que p divise C_p^k

3) En déduire que pour tout entier naturel x, on a : p divise $(x+1)^p - 1 - x^p$

EXERCICE N9:

Soit n∈ IN^*. On appelle indicateur d'Euler de l'entier n, noté $\varphi(n)$ le nombre des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et k∧n=1.

Calculer $\varphi(2)$; $\varphi(6)$; $\varphi(13)$; $\varphi(p)$ et $\varphi(p^2)$ avec p est un entier naturel premier.

(pour p^2 on pourra calculer le nombre d'entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et k∧n≠1).

EXERCICE N10:

On désigne par $a_n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_{n-1} + 1$; n∈ $IN^*\backslash\{1\}$ avec p_i le $i^{éme}$nombre premier $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.

1) Vérifier que $p_2 \leq a_2$, que $p_3 \leq a_3$ et que $p_4 \leq a_4$

2) a) Montrer que le nombre a_n n'admet aucun diviseur premier dans l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}\}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

b) En déduire que pour tout n∈ $IN^*\backslash\{1\}$, on a : $p_n \leq a_n$

EXERCICE N11:

1) Calculer le reste de la division euclidienne par 13 du nombre 5^n pour tout entier n∈ $\{1,2,3,4,5,6,\}$

2) a) Montrer par récurrence sur n que 5^{4n} –1 est divisible par 13.

b) En déduire que 5^{4n+1} –5 , 5^{4n+2} –12 et 5^{4n+3} –8 sont divisibles par 13.

c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne par 13 du nombre 5^{2011}

3) On considère le nombre $A_p = 5^{2p} + 5^{4p}$ avec p est un entier naturel.

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de A_p par 13 tel que p=2n.

b) Montrer que si p=2n+1 alors A_p est divisible par 13.

EXERCICE N12:

1) a) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le PGCD de 1995 et 735.

b) Trouver alors tous les couples d'entiers naturels (x,y) vérifiant :

735(x–1)–1995(y+3)=0

2) On pose $\alpha = 3^{240} + 3^{120} + 1$ et $\beta = 3^{120} + 1$

a) Montrer que tout diviseur commun de α et β, divise 3^{240}.

b) En déduire que α et β sont premiers entre eux.

c) Montrer que α divise $(3^{360} - 1)$ et β divise $(3^{240} - 1)$.

d) En déduire le PGCD de $(3^{360} - 1)$ et $(3^{240} - 1)$.