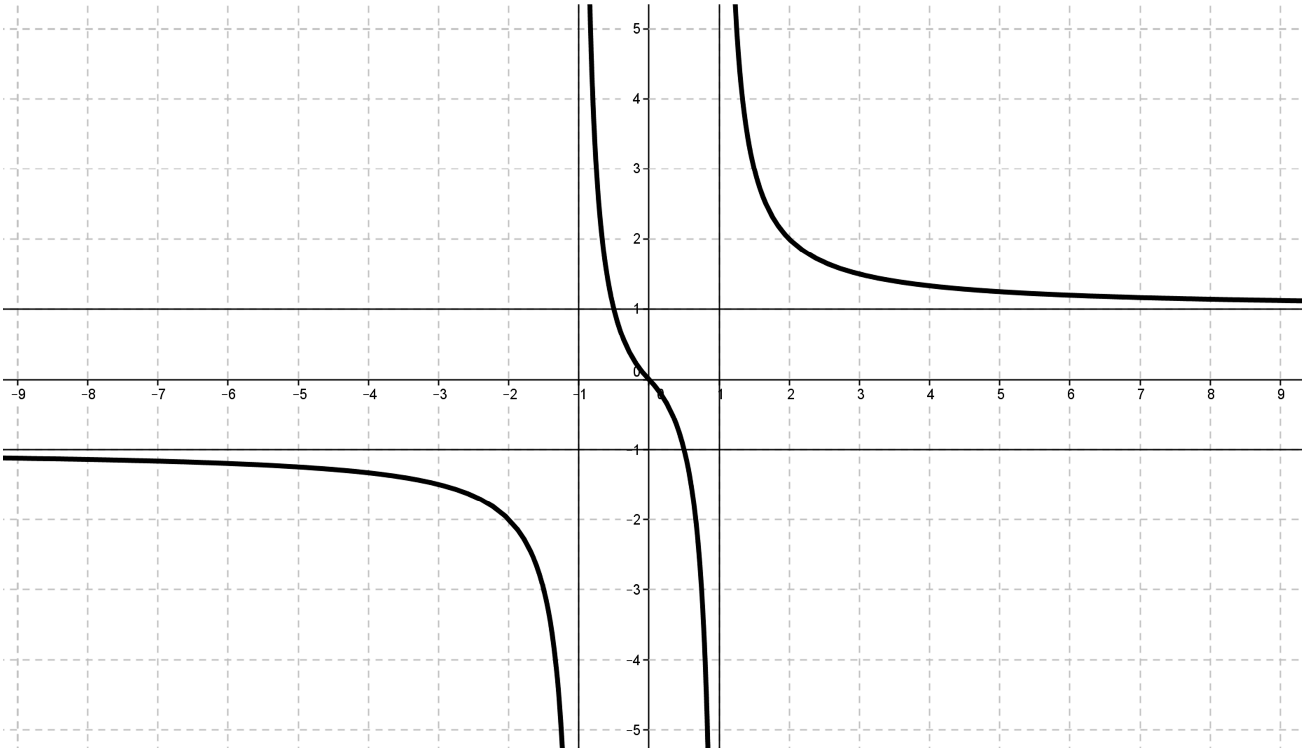
L. Regueb	**Mathématiques**	Classe : $4^{ème}$M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Contrôle №1	Le:14/11/2014 D:2h

Exercice1(10pts)

La figure si dessous désigne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ / $\{-1 , 1\}$, ainsi que ses asymptotes . La courbe de f rencontre la droite d'équation y=1 au point d'abscisse $\frac{-1}{2}$ et la droite y=-1 au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.



1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ f)(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(f\circ f)(x)$.

2) a) Déterminer l'image de l'intervalle $]-1 , 0]$ par f .

b) Montrer que pour tout entier n , dans l'intervalle $]-1 , 0]$, l'équation f(x)=n admet une et une seule solution α_n.

c) Montrer que la suite (α_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3)a) Déterminer le domaine de définition de $f\circ f$.

b) Montrer que la fonction $f\circ f$ n'est pas prolongeable par continuité en 1 et en -1 .

c) Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R} / \{-1 , 1\}$, $f(x) = \frac{ax}{|x|+b}$, trouver les réels a et b .

d) Déterminer alors l'expression de $f\circ f$.

Exercice3(4pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

z étant un nombre complexe , on note (S) le système : $\begin{cases} |z| = |z-6| \\ arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

1) Donner le module et un argument des trois complexes suivants : $a = \sqrt{3} + i$; $b = -2 + 2i$; $c = 3 + 3i$

2) Parmi les complexes a , b et c , lesquels sont solutions du système (S) ? (justifier la réponse).

3) M étant le point d'affixe z, et A étant le point d'affixe 6, traduire géométriquement les deux contraintes de (S) .

4) Résoudre le système (S) par la méthode de votre choix.

Exercice4(6pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ *et* $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2)a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire l'expression de r_n en fonction de n .

b) Que dire de la longueur OA_n , lorsque n tend vers $+\infty$?

3)a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées .