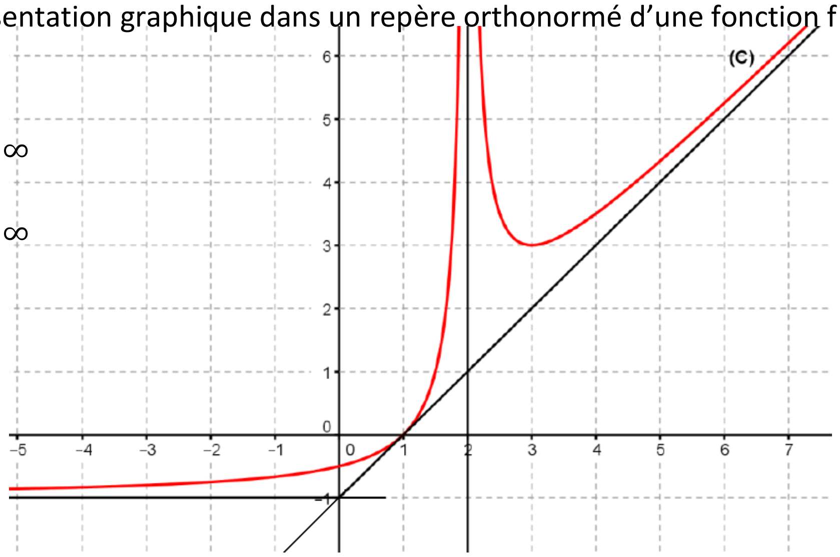
Mathématiques	Devoir de Contrôle n°1	Lycée Jammel 3
$4^{ème}$M		Le 10/11/2014
Mr :Afli Ahmed		

Exercice 1:

Le graphique ci-dessous (C) est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur IR\{2}.



- ✓ La droite $\Delta : y = x - 1$est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
- ✓ La droite $\Delta' : y = -1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$
- ✓ La droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale à (C)

1. A l'aide du graphique et des renseignements fournis, déterminer

   a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{f(x)+1}$

   b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)-x}$: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(f\circ f)(x)}{f(x)}$

   c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\dfrac{2x+1}{x-1})$

2. Soit la fonction g : $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $h = g\circ f$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de h .

   b. Montrer que h est prolongeable par continuité en 2

Exercice 2:

Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = \begin{cases} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & si\ x < 0 \\ \frac{2x^2}{1+x^2} & \text{si x } \geq 0 \end{cases}$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat.

   b. Montrer que pour tout réel $x < 0$ on a : $0 \leq f(x) \leq 2x^2$

   c. En déduire que f est continue à gauche en 0.

2. a. Montrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $2x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 0$

   b. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle [0,+∞[

   a. Etudier les variations de g

   b. Montrer que l'équation g(x) = $\frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, admet une unique solution a_n dans]0 ;1[

Exercice 3:

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1+U_n{}^2}{2U_n} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout n$\in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$.
2. a. Etudier la monotonie de la suite U

   b. En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   c. Retrouver la limite de la suite U
4. Soit (S_n) la suite definie sur $\mathbb{N}^*$par $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

   a. Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, $n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$

   b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 4:

On donne l'équation (E_α) : z²-(1+i)$e^{i\alpha}$ z+i$e^{2i\alpha}$ =0 avec $\alpha \in [0, 2\pi]$

A. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

B. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct ($O, \vec{u}, \vec{v}$) ; on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 avec $z_1 = e^{i\alpha}$ et $z_2 = ie^{i\alpha}$.

1. Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle.
2. On pose Z= $z_1 + z_2$.

   a. Donner le module et un argument de Z.

   c. Soit I = $M_1 * M_2$

   i. Montrer que lorsque α varie dans $[0, 2\pi]$ le point I décrit un cercle (C) que l'on précisera .

   ii. Montrer que (M_1M_2) est tangente à (C) .
3. On suppose que $\alpha \in [0, \pi]$

   a. Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}) \equiv \alpha + \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

   b. En déduire la valeur de α pour laquelle la droite (M_1M_2) est parallèle à l'axe $(O, \vec{v})$.

   c. Placer les points M_1 et M_2 pour la valeur trouvée de α .

   d. Soit A le point d'affixe 1+i , calculer l'aire du triangle AM_1M_2 .