Devoir de contrôle N1

LRT Mateur

Tayechi Jamel

7 Novembre 2014 4 SC

Exercice 1(3pts)

1. La forme exponentielle de $(-1-i\sqrt{3})$ est : a) $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ b) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ c) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2. Si z un nombre complexe tel que $|z| = 2$ alors $\left|z - \frac{1}{\bar{z}}\right|$ égal à a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$

3. La suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

   a) monotone b) divergente c) convergente

4. Si U est une suite verifiant $\dfrac{n^2+1}{n^2} \leq U_n \leq \dfrac{1}{n} + 1$

   alors a) U converge vers 0 b) U converge vers 1 c) U diverge

Exercice 2 (5pts)

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = & \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = & \dfrac{2U_n}{1+U_n} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 < U_n < 2$
   (b) Etudier la monotonie de la suite U
   (c) Déduire que U est convergente et calculer sa limite.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :$|1 - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|1 - U_n|$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}; |1 - U_n| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$.
   (c) Retrouver alors la limite de U.

Exercice 3 (5pts)

1. (a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(1-3i)^2$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l 'équation : $z^2 - (3-i)z + 4 = 0$

2. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $2-2i$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

   (a) Donner la forme algébrique de z_B.
   (b) Placer les points A et B dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

3. Ecrire sous forme exponentielle z_A et $\dfrac{z_B}{z_A}$ puis déduire la nature du triangle OAB.

4. Soit M le point d'affixe $3 + i\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Déterminer le réel α pour que le triangle AMB soit rectangle en M.

Exercice 4 (7pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2\cos(\frac{\pi}{x}) & si\ x > 0 \\ x^3 + x + 1 & si\ x \leq 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x))$
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
   (c) Montrer que f est continue en 0
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $]-0.7; -0.6[$
4. Calculer en justifiant $\lim\limits_{x \to 0^-} f(\dfrac{1}{x})$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(\tan x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\frac{1}{x})$