Lycée secondaire Mghira		Date : 05-03-2014
Prof : Bounouh Arbi	Devoir de synthèse N°2	Durée :3H
Classes : $4^{ième}$:sc-exp1+2		Epreuve :Mathématiques

Exercice 1:(3.5pts)

Le but de cette exercice est de démontrer les trois propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien énoncées ci-dessous :

Soit a et b deux réels strictement positifs :

$P_1 : ln(ab) = lna + lnb$; $P_2 : \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -lnb$; $P_3 : \ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$

*On considère les trois fonctions f, g et h définies sur l'intervalle]0,+∞ [par $f(x) = lnx$; $g(x) = \ln(ax)$ où a est un réel strictement positif , $h(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

1)a)Montrer que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x\,\epsilon]0,+\infty[$.

b)En déduire qu'il existe une constante réelle c telle que $\ln(ax) = lnx + c$, $x > 0$.

c)Montrer alors que $\ln(ax) = lna + lnx$, $x > 0$. (P_1)

2)a)Montrer que $f'(x) = h'(x)$ $pour\ tout\ x\,\epsilon]0,+\infty[$.

b)En déduire que $lnx = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$. (P_2)

3)En utilisant P_1 et P_2 , montrer P_3 .

Exercice 2:(3pts)

On pose pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n+2}x \ \ dx$.

1)a)Calculer I_0 .

b)Vérifier que pour tout n , $0 \le I_{n+1} \le I_n$.

c)En déduire que la suite (I_n) est convergente .

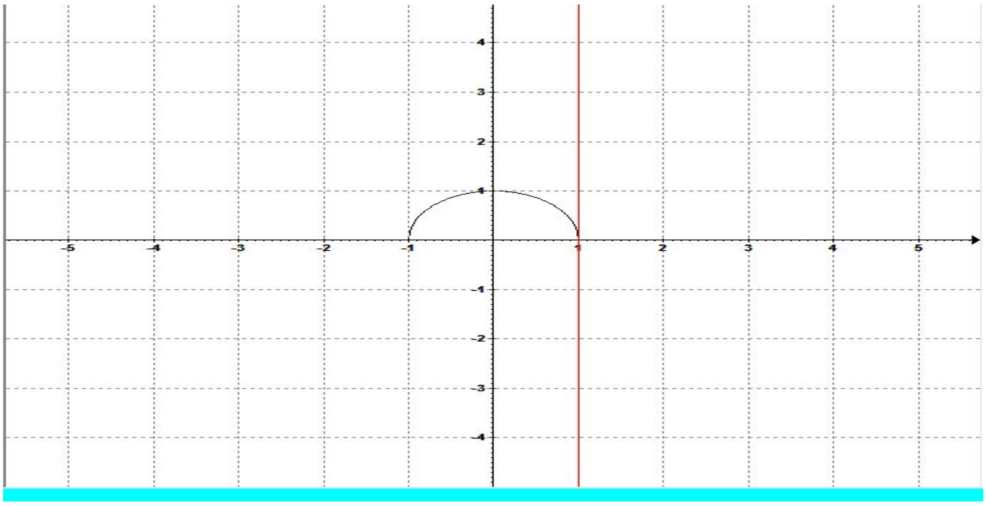
2)a)Montrer que pour tout n , $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$.

b)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c)Calculer I_2 .

Exercice 3:(3pts)

Soit f la fonction définie sur [-1 , 1] par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ et ζ sa courbe représentative dans le plans munie d'un repère orthogonal (O , $\vec{\imath},\vec{\jmath}$).



Le but de cette exercice est de calculer $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par :la courbe ζ et les droites d'équations y=1 , x=0 et x=1 .

1)Soit G ,la fonction définie sur [0,1] par $G(x) = \int_0^x f(t)dt$

Montrer que G est dérivable sur [0,1] et donner $G'(x)$ pour tout $x\epsilon[0,1]$.

2)Soit F la fonction définie sur [0,$\frac{\pi}{2}$] par $F(x) = \int_0^{cosx} f(t)dt$.

a)Montrer que F est dérivable sur [0,$\frac{\pi}{2}$] et que $F'(x) = -sin^2x$ pour tout $x \epsilon [0 ,\frac{\pi}{2}]$

b)En déduire que pour tout $x\epsilon \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{\pi}{4}$.

c)Calculer alors $\mathcal{A}$.

Exercice 4 :(4.5pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) . On donne les points A(1,-2,2) et B(1,0,1)

Et Soit S :$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z = 0$.

1)Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R .

2)Soit P le plan passant par E(1,1,-1) et perpendiculaire à la droite (AB) .

a)Montrer qu'une équation cartésienne de P est $2y - z - 3 = 0$.

b)Montrer que le plan P est tangent à la sphère S .

3)Soit Q_m: $-2x + z + m = 0$ où m est un paramètre réel .

a)Déterminer suivant m : $S \cap Q_m$.

b)En déduire que Q_0 coupe la sphère S suivant un cercle ζ dont on déterminera son rayon r et son centre H

Exercice 5:(6pts)

Dans l'exercice on désigne par e le réel tel que $lne = 1$; on a ainsi $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$.

Soit la fonction f définie sur [0,+∞[par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2 lnx & si\ x\epsilon]0,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O , $\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

1)a)Montrer que f est continue à droite en 0 .

b)Montrer que f est dérivable à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat .

2)Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Déterminer la nature de la branche infinie de ζ .

3)a)Montrer que pour tout $x\epsilon]0,+\infty[$; $f'(x) = -4xlnx$.

b)Dresser le tableau de variation de f .

4)Déterminer les abscisses des points d'intersections de ζ avec l'axe (O,$\vec{\imath}$) .

5)Construire ζ dans le repère (O , $\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

6)Soit λ un réel tel que : $0 < \lambda < \sqrt{e}$.

a)En utilisant une intégration par partie montrer que $\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2 lnx\, dx = \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln(\lambda) + \frac{1}{18}e\sqrt{e}$.

b)Soit $\mathcal{A}$(λ) l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda\ et\ x = \sqrt{e}$ .Calculer $\mathcal{A}$(λ) .

c)Montrer que $\lim_{\lambda\to0^+} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{2}{9}e\sqrt{e}$.