L.S.Dar elamen

Mr :Nebti Khaled

Classe :4Sc.Exp:1

Devoir de Synthèse N°2
Durée :3h
AS :12/13

Exercice N°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes une seule est exacte, le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace $\mathcal{E}$, l'ensemble des M de $\mathcal{E}$ tel que :

$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ est : **a.** une droite perpendiculaire au plan (ABC) passant par C

b. une droite perpendiculaire au plan (ABC) passant par B **c.** une droite parallèle au plan (ABC)

2) $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+sinx)}{3x}$ est égale à :

a. 1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{3}$

3) Le volume v de solide S engendré par la rotation de l'arc $[\widehat{AB}] = \{M(x,y); 1 \le x \le 3ety = \sqrt{2x+1}\}$ autour de l'axe des abscisses est : **a.** 10π **b.** 12π **c.** 9π

4) Soit $a \in]0,1[$ et $I = \int_a^{a^2} \frac{x}{1+x^3} dx$ alors :

a. $I \ge 0$ **b.** $I \le 0$ **c.** $I > \frac{a^2-a}{1+a^3}$

Exercice N°2 : (pts)

Dans la feuille annexe on a représenté une courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction g définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et la droite Δ d'équation Δ: $y = x$, T est une tangente à $\mathscr{C}$ au point $B(1,2)$. la courbe $\mathscr{C}$ admet :

* une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
* $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite Δ.
* $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en $A(\alpha, 0)$

En utilisant le graphique

1) **a.** Dresser le tableau de variation de g.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0,1[$

c. Déterminer alors le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

d. Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

e. Tracer dans la feuille annexe la courbe $\mathscr{C}'$ de g^{-1}.

2) La courbe $\mathscr{C}$ de g définie sur $]0,+\infty[$ par $g: x \longmapsto (ax+b) + lnx$.

a. Déterminer à partir du graphique $g(1) et\ g'(1)$

b. Calculer $g'(x)$ en fonction de a et en déduire que $g(x) = (x+1) + lnx$.

c. Montrer que $G(x) = \frac{x^2}{2} + xlnx$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$.

d. Calculer alors l'aire de la partie du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = 1\ et\ x = 2$

3) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par: $\begin{cases} f(x) = \frac{xlnx}{x+1}, si x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat obtenu géométriquement.

c. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

d. Dresser le tableau de variation de f .

e. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $(+\infty)$ et tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan .

Exercice N°3 : (6 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne un solide (S) les points A, C et F définis par : $\overrightarrow{OA}=3\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OC}=3\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OF}=3\vec{k}$, OABC et OCDF sont des rectangles comme il indique la figure suivante.

1) **a.** Calculer les composantes de vecteur $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}$

b. En déduire que A, C et F déterminent un plan P d'équation cartésienne $P: x+y+z-3=0$.

c. Soit Q le plan médiateur de segment [BD], Vérifier qu'une équation cartésienne de Q est Q : $-x+z=0$.

d. Démontrer que P et Q sont perpendiculaires et déterminer $P\cap Q$.

2) Soit la droite Δ dont la représentation paramétrique est $(\Delta):\begin{cases}x=-2t+1\\y=-2t+1\\z=-2t+1\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

a. Montrer que Δ coupe le plan P en un point H de coordonnées H $(1,1,1)$.

b. Montrer que Δ est l'axe de cercle circonscrit au triangle ACF

3) **a.** Déterminer l'aire du triangle OAF et en déduire le volume v du solide (S)

b. Soit K un point à l'extérieur de solide (S), déterminer $d(K,P)$ la distance du point K au plan P tel que le volume v_1 du tétraèdre ACKF est égale au volume v de S

4) Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $x^2+y^2+z^2-2mx+2my-2z+1=0$

a. Montrer que pour tout $m\in\mathbb{R}^*$, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b. Déterminer m pour que S_m soit tangent à P

c. On prend $=2$, montrer que la sphère S_2 coupe le plan P en un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera

Exercice N°4 : (4 pts)

Soit (I_n) la suite définie sur IN par : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\sin 2x\,dx$

1) **a.** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $I_n\geq 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

2) **a.** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $I_n\leq\frac{1}{n+1}$

b. En déduire $\lim_{n\to+\infty}I_n$

3) **a.** Calculer I_0

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que $I_1=0{,}25$

c. En effectuant une double intégration par partie montrer que $I_{n+2}=\frac{n+2}{4}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}-(n+1)I_n\right)$

d. Déterminer alors I_3

Feuille annexe à rendre

Nom et Prénom :……………………………………………………………Classe :……………………………N° :…………