Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 2	Durée : 2 heures
Professeur : Maâtallah	Date : Le 23-02-2011	Classe : $4Sc_3$

Exercice n° 1: (7 points)

Soit u et v deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_n = \frac{7}{u_n}$.

1/ Calculer v_0, u_1, v_1, u_2 et v_2 . Comparer les valeurs approchées de u_2 et v_2 .

2/ Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ u_n > 0\ \ et\ v_n > 0$.

3/ Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N} : u_n - v_n \geq 0$.

4/ Etudier la monotonie de chacune des deux suites $u\ et\ v$.

5/ a) Justifier que $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ u_n \geq \frac{7}{3}$.

b) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{3}{28}(u_n - v_n)^2$.

c) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ u_n - v_n \leq (\frac{3}{28})^{2^n - 1}$.

6/ Montrer que $u\ et\ v$ sont adjacentes . Résoudre dans $]0, +\infty[:\ x = \frac{7}{x}$ et déduire la limite de $u\ et\ v$.

Exercice n° 2: (7 points)

I) Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

a) $\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\, dt$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t)\, cos^3(t)dt$ c) $\int_1^2 \frac{2}{(3t-1)^2}dt$

II) Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = cotan^2(x)$.

1/ a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J qu'on précisera .

c) Tracer la courbe ( ) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2/ Soit I=$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$. Calculer puis interpréter graphiquement I .Déduire la valeur de J=$\int_0^1 f^{-1}(t)dt$

3/ Montrer que $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(t)dt = \frac{1}{3}$. Calculer le volume engendré par la rotation autour $(O, \vec{\imath})$ de la partie de ( ) limitée par les droites $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice n° 3: (6 points)

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 . On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On désigne par I le milieu de la face ABFE et J le milieu de [DC] .

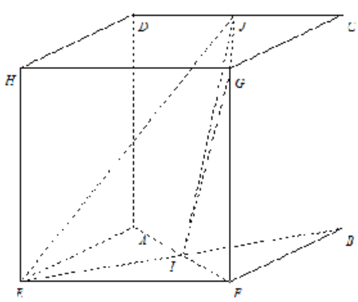
1/ a) Calculer $\overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EJ}$. Déduire l'aire du triangle EIJ .

b) Calculer le volume du tétraèdre EGIJ . Déduire la distance du point G au plan (EIJ) .

2/ a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P=(EIJ) est : $2x + y + 2z - 2 = 0$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par G est perpendiculaire à P.

c) Déduire que le projeté orthogonal K du point G sur P a pour coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.



Bon travail