

Exercice n°1

Choisir une seule réponse correcte en **justifiant** la réponse choisit.

Soit $u_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$; $n \in \mathbb{N}$

1) u_2 est égale à :

a) $e-2$

b) $2-e$

c) $e-1$

2) A l'aide d'intégration par partie on a u_{n+1} est égale à :

a) $e - (n+1)u_n$

b) $(n+1)u_n - e$

c) $\frac{1}{n+1}u_n - e$

3) La suite u_n est :

a) est décroissante

; b) est croissante

; c) ni croissante ni décroissante

Exercices n°2 (10 points)

Soit f une fonction définie sur $[0;1[$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \ln x}{\ln^2 x} & \text{si } x \in]0;1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

puis montrer que pour tout x de $]0;1[$ on a $f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x \ln^3 x}$

b) Etudier les variations de f sur $]0;1[$; (C) la courbe représentative de f

c) Placer le point d'abscisse $\frac{1}{e}$ de (C); (L) la courbe représentative de la fonction \ln

d) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

2) a) Montrer que f est bijective de $[0;1[$ sur $[0;+\infty[$ et construire (C') la courbe de f^{-1} .

b) Déterminer $f\left(e^{-\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2x}}\right)$; en déduire $f^{-1}(x)$ et son domaine de définition

3) Soit F la fonction définie sur $[0;1[$ par : $F(x) = \frac{-x}{\ln x}$ si $x \in]0;1[$ et $F(0)=0$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0;1[$ et calculer $F'(x)$

b) Déterminer alors l'aire A de la partie du plan limitée par (C) et les droites

d'équation $y=2$; $x=0$ et $x=\frac{1}{e}$

4) Soit g la fonction définie sur $[0;1[$ par :

$$g(x) = \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x) + \int_0^x f(t) dt$$

a) Calculer $g(0)$ et montrer que g est dérivable sur $]0;1[$ puis calculer $g'(x)$

b) déduire $g(x)=0$ pour tout x de $[0;1[$

c) En déduire $\int_0^2 f^{-1}(t) dt$. Interpréter graphiquement le résultat. Retrouver ce résultat par 2^{ème} méthode

Exercice n°3 (7 points)

Soit OBC un triangle tel que $OB=2OC$ et $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$; (C_B) et (C_C) deux cercles passent par O et de centres respectifs B et C . On désigne par H

et K les points définies par $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $S_C(B)=K$; voir figure (page 3)

- 1) Soit s une similitude directe de centre O et $S(B)=C$
Caractériser s et montrer que $s((C_B))=(C_C)$
- 2) Soit f une similitude qui transforme (C_B) en (C_C)
 - a) Quel est le rapport de f ?
 - b) Montrer que l'ensemble Γ des centres I des similitudes f est le cercle de diamètre $[HK]$ construire Γ
- 3) Soit A le point du plan P tel que le triangle ABC soit équilatéral de sens direct.
On désigne par Γ' le cercle circonscrit au triangle ABC et par Ω le centre de Γ'
On pose $s' = R_{(A; \frac{\pi}{3})} \circ h_{(B; \frac{1}{2})}$
 - a) Déterminer $s'(B)$ et montrer que s' est une similitude directe .Préciser son rapport et son angle .
 - b) On désigne par ω le centre de s' .Montrer que $\omega \in \Gamma \cap \Gamma'$ et que $\omega = S_{\Omega}(B)$
- 4) On pose $\sigma = s' \circ S_{(\omega B)}$
 - a) Montrer que σ est une similitude indirecte .Préciser son rapport et son centre.
 - b) On pose Δ l'axe de σ .Montrer que $S_{\Delta}(\Omega)=C$; en déduire que $\Delta=(\omega H)$
 - c) Construire ω puis Δ et montrer que $\sigma((\omega K))=(\omega K)$

Feuille à rendre avec la copie du devoir

Nom et Prenom



