L. Regueb	Mathématiques	Classe : 4ème M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Synthèse №2	Le : 08/03/2013 D: 4h

Exercice1(3pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte .Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée .

1) La similitude indirecte dont la transformation complexe associée est $z' = 2i\bar{z} + 3$

est d'axe la droite d'équation :

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x + 1$

2) La limite de $\frac{x^2}{e^x - 1}$ quand x tend vers 0 est égale à :

a) 1 b) $+\infty$ c) 0

3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Si $\int_1^2 (f(t) - 1)dt = 0$, alors la valeur moyenne de f sur [1,2] est égale à :

a) 0 b) 1 c)2

Exercice2(5pts)

1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$, $f(x) = x^3 e^{1-x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Construire la courbe (C) .

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2}\,dx$.

a) Calculer u_1 .

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{e}{n+1}$.

En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite .

3)a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right) u_n - \frac{1}{2}$.

b) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites

d'équations respectives , $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice3(6pts)

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet principal A.

On pose $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv 2\alpha\ [2\pi]$ où α est un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par O le milieu de [BC] et par D le symétrique de A par rapport à O .

Soient I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC) .

1) Soit f la similitude directe qui transforme O en I et D en J .

a) Montrer que f a pour angle α et pour rapport $\cos(\alpha)$.

b) Prouver que le centre de f est le point A .

2) On désigne par E le symétrique du point O par rapport au point I .

Montrer que $f(B) = O$ et que $f(C) = E$.

3) Soit g la similitude indirecte telle que : $g(B) = O$ et $g(C) = E$.

Déterminer le rapport de g et montrer que $g(O) = I$.

4) a) Montrer que $g = S_{(OE)} \circ f$

b) Montrer que $g(D) = A$ et $g(A) = J$.

5) Soit Ω le centre de g .

a) Montrer que $(g \circ g)(D) = J$ et en déduire que Ω appartient à la droite (DJ) .

b) Montrer que Ω appartient à la droite (BI) .

c) Construire le point Ω .

Exercice4(6pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ .On considère les ensembles des points M(x,y) suivants :

$$(H): x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0 \qquad ; \qquad (P): 4y^2 + 2x - 5 = 0 \ .$$

1)a) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets et les asymptotes .

b) Montrer que (P) est une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice .

2)a) Construire (H) et (P) dans le même repère .

b) Vérifier que la droite T d'équation : $x + 2\sqrt{5}y - 5 = 0$ est une tangente commune à (H) et (P) au point $A\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

3) Pour tout $x \geq 0$, on pose : $F(x) = \int_1^{e^x - e^{-x} + 1} \sqrt{4 + (t-1)^2}\, dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F'(x) = (e^x + e^{-x})^2$

b) Calculer $F(0)$ et déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^x - e^{-x} + 1 = \frac{5}{2}$.

d) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (H) et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = \frac{5}{2}$. Montrer que $\mathcal{A} = \frac{15}{8} + 2\ln(2)$ (u.a).

Exercice1

Question n°	1	2	3
Réponse	a	c	b

Indications :

1) $z' = 2i\bar{z} + 3$ est la similitude indirecte

de rapport 2 , de centre Ω(-1,-2) et d'axe la droite d'équation y = x – 1 .

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\frac{e^x-1}{x}} = \dfrac{0}{1} = 0$

3) $\int_1^2 (f(t) - 1)dt = 0 \;\Rightarrow\; \int_1^2 f(t)dt - \int_1^2 dt = 0 \Rightarrow \frac{1}{2-1}\int_1^2 f(t)dt = 1 \Rightarrow \bar{f} = 1$

(où $\bar{f}$ est la valeur moyenne de f sur [1,2])

Exercice2

1)a) Soit x> 0 , $f(x) = x^3 e^{1-x^2} > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\big(f(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} \ln\big(x^3 e^{1-x^2}\big) = \lim_{x\to+\infty} (3\ln(x) + 1 - x^2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(3\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} - x\right) = +\infty(0 + 0 - \infty) = -\infty$$

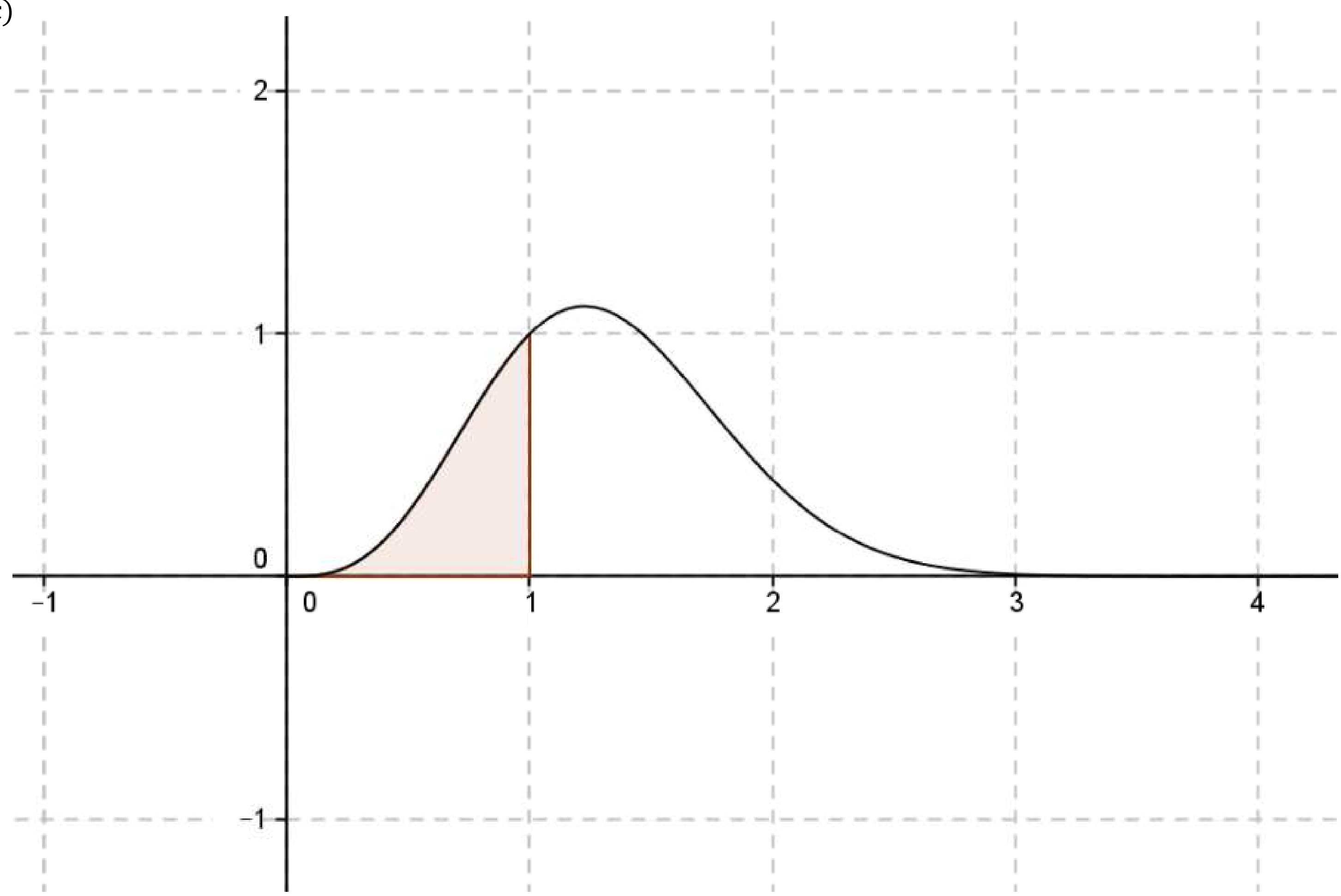
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\big(f(x)\big) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'(x) = x^2 e^{1-x^2}(3 - 2x^2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$; car $x \in [0, +\infty[$.

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f'(x)	0	+	0	−	
f	0	↗	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2e}}$	↘	0

c)



2) $$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2}\,dx \quad , n \in \mathbb{N}^*$$

a) $u_1 = \int_0^1 x e^{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x e^{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$.

b) $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le -x^2 \le 0 \Rightarrow 0 \le 1-x^2 \le 1 \Rightarrow e^0 \le e^{1-x^2} \le e^1$

$\Rightarrow x^n \le x^n e^{1-x^2} \le e x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$

D'où $\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx \le \int_0^1 e x^n dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{e}{n+1} \quad , (n \in \mathbb{N}^*)$

On a: $\begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \le u_n \le \dfrac{e}{n+1} \quad , (n \in \mathbb{N}^*) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0 \end{cases}$ alors $\begin{cases} \text{la suite } (u_n) \text{ est convergente} \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{cases}$

3)a) $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2}\,dx \quad , n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{1-x^2}\,dx \quad , n \in \mathbb{N}^*$

On pose : $u(x) = x^{n+1}$ $\qquad u'(x) = (n+1)x^n$

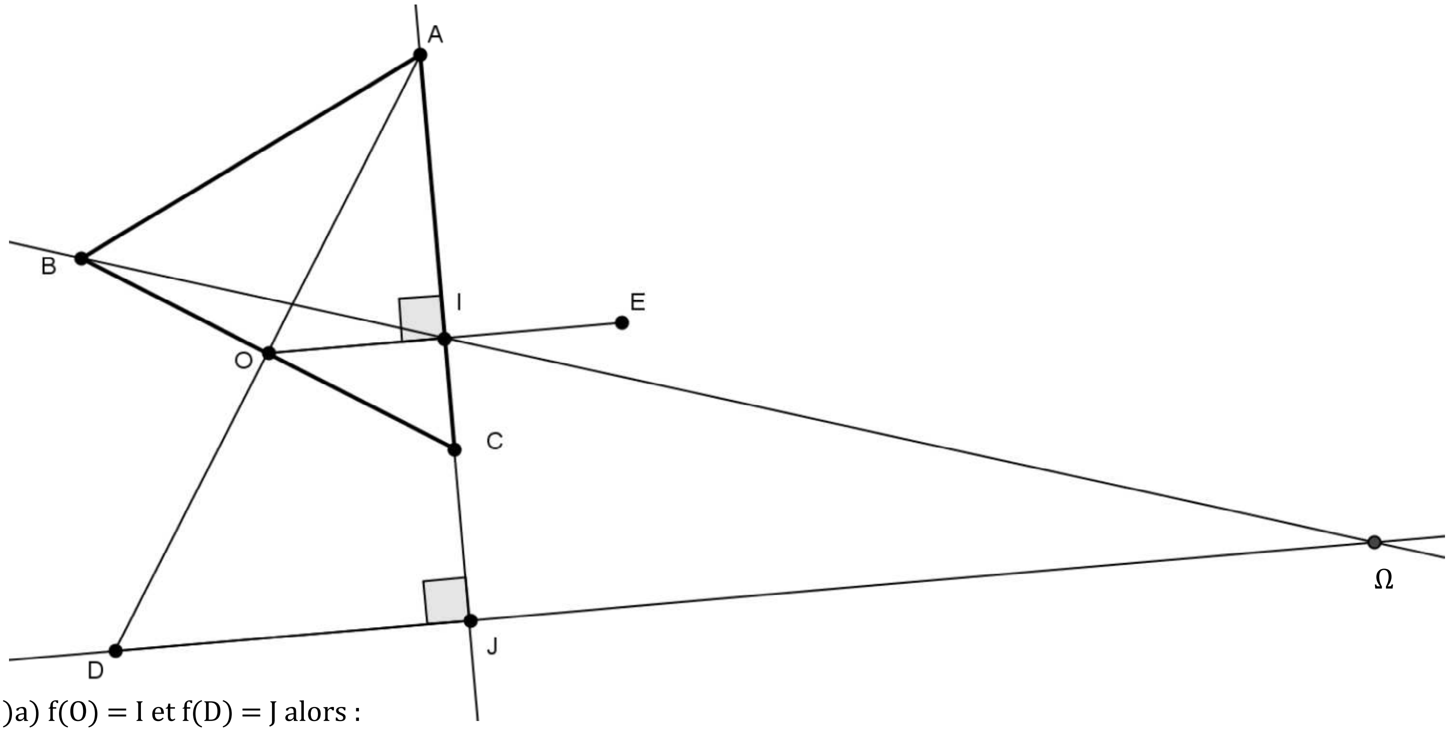
$v'(x) = x e^{1-x^2}$ $\qquad v(x) = \frac{-1}{2} e^{1-x^2}$

Alors : $u_{n+2} = \left[\frac{-1}{2} x^{n+1} e^{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx = \left(\frac{n+1}{2}\right) u_n - \frac{1}{2} \quad , n \in \mathbb{N}^*$.

b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 1 .

$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^3 e^{1-x^2}\,dx = u_3 = u_{1+2} = \frac{1+1}{2} u_1 - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}$ (u.a).

Exercice3



1)a) $f(O) = I$ et $f(D) = J$ alors :

f est de rapport $\frac{IJ}{OD} = \frac{AI}{AO} = \cos(\alpha)$ et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{IJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \alpha \ [2\pi]$.

b) $(OI) \perp (AC)$ et $(DJ) \perp (AC)$ donc $(OI) // (DJ)$

on a : $\begin{cases} ADJ \text{ est rectangle en } J \\ O = A * D \\ (OI) // (DJ) \\ I \in (AJ) \end{cases}$ donc $I = A * J$

$O = A * D \implies f(O) = f(A) * f(D) \implies I = f(A) * J$

En fin : $\begin{cases} I = f(A) * J \\ I = A * J \end{cases}$ donc $f(A) = A$ et par suite f est de centre A .

2) on a : $\begin{cases} \frac{AO}{AB} = \cos(\alpha) \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \alpha \ [2\pi] \end{cases}$ donc $f(B) = O$

$O = B * C \implies f(O) = f(B) * f(C) \implies I = O * f(C)$

$\begin{cases} I = O * f(C) \\ I = O * E \end{cases}$ donc $f(C) = E$

3) $g(B) = O$ et $g(C) = E$ alors g est de rapport $\frac{OE}{BC} = \cos(\alpha)$ car ($f(B) = O$ et $f(C) = E$ donc $\frac{OE}{BC} = \cos(\alpha)$)

$O = B * C \implies g(O) = g(B) * g(C) = O * E = I$.

4)a) $(S_{(OE)} \circ f)(B) = S_{(OE)}(O) = O$, $(S_{(OE)} \circ f)(C) = S_{(OE)}(E) = E$

$(S_{(OE)} \circ f)$ et g sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts B et C alors elles sont égales d'ou $g = S_{(OE)} \circ f$.

b) $g(D) = \left(S_{(OE)} \circ f\right)(D) = S_{(OE)}(J)$

$O = A * D \implies f(O) = f(A) * f(D) \implies I = A * J$

on a : $\begin{cases} I = A * J \\ I = O * E \\ (OE) \perp (IJ) \end{cases}$ alors $S_{(OE)}(J) = A$, d'où $g(D) = A$.

$g(A) = \left(S_{(OE)} \circ f\right)(A) = S_{(OE)}(A) = J$

5)a) $(g \circ g)(D) = g(A) = J$, $g \circ g$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\cos^2(\alpha)$ et $(g \circ g)(D) = J$ alors $\Omega \in (DJ)$

b) $(g \circ g)(B) = g(O) = I$ alors $\Omega \in (BI)$.

c) $\{\Omega\} = (DJ) \cap (BI)$.

Exercice4

$(H): x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0$; $(P): 4y^2 + 2x - 5 = 0$.

1)a) $(H): x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0$

$(H): -\frac{(x-1)^2}{2^2} + y^2 = 1$, donc (H) est une hyperbole de centre $\Omega(1 , 0)$.

Si M est un point de coordonnées (X , Y) dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ et de coordonnées (x , y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

On a : $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$	Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
$(H): -\frac{X^2}{2^2} + Y^2 = 1$ Les sommets de (H) sont : $S(0 , 1)$ et $S'(0 , -1)$ Les foyers de (H) sont : $F(0,\sqrt{5})$ et $F'(0,-\sqrt{5})$ Les asymptotes de (H) sont : $\Delta_1: Y = \frac{1}{2}X$ et $\Delta_2: Y = -\frac{1}{2}X$	$(H): -\frac{(x-1)^2}{2^2} + y^2 = 1$ Les sommets de (H) sont : $S(1 , 1)$ et $S'(1 , -1)$ Les foyers de (H) sont : $F(1,\sqrt{5})$ et $F'(1,-\sqrt{5})$ Les asymptotes de (H) sont : $\Delta_1: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ et $\Delta_2: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b) $(P): 4y^2 + 2x - 5 = 0$

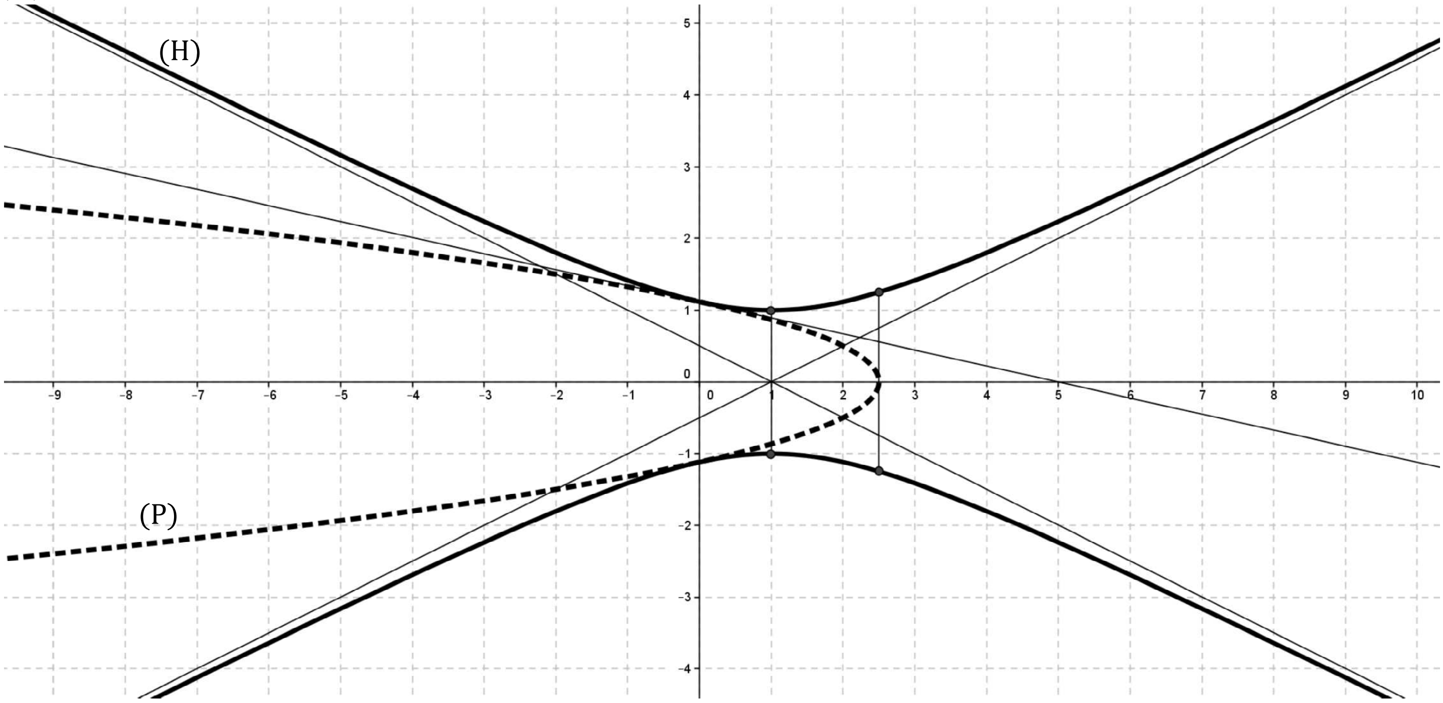
$(P): y^2 = -2 \times \frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)$, donc (P) est une parabole de sommet $I\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ et de paramètre $\frac{1}{4}$.

Si M est un point de coordonnées (X , Y) dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$ et de coordonnées (x , y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

On a : $\begin{cases} X = x - \frac{5}{2} \\ Y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = X + \frac{5}{2} \\ y = Y \end{cases}$

Dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$	Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
$(P): Y^2 = -2 \times \frac{1}{4}X$ (P) est de sommet $I(0,0)$ (P) est de foyer $F_1\left(\frac{-1}{8}, 0\right)$ (P) est de directrice ; $D: X = \frac{1}{8}$	$(P): y^2 = -2 \times \frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)$ (P) est de sommet $I\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ (P) est de foyer $F_1\left(\frac{19}{8}, 0\right)$ (P) est de directrice ; $D: x = \frac{21}{8}$

2)a)



b) $A\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, les coordonnées de A vérifient l'équation $x^2-4y^2-2x+5=0$ donc $A\in(H)$

et les coordonnées de A vérifient l'équation $4y^2+2x-5=0$ donc $A\in(P)$.

On désigne par T_H la tangente à (H) en A et T_P la tangente à (P) en A .

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, le point A est de coordonnées $\left(-1,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

$$T_H:-\frac{-X}{4}+\frac{\sqrt{5}}{2}Y=1 \implies T_H:X+2\sqrt{5}Y-5=0$$

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

$$T_H:x-1+2\sqrt{5}y-4=0 \implies T_H:x+2\sqrt{5}y-5=0 \text{ d'où } T_H=T$$

Dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$, le point A est de coordonnées $\left(-\frac{5}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$

$$T_P:Y\times\frac{\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{4}\left(X-\frac{5}{2}\right) \implies T_H:X+2\sqrt{5}Y-\frac{5}{2}=0$$

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

$$T_P:x-\frac{5}{2}+2\sqrt{5}y-\frac{5}{2}=0 \implies T_P:x+2\sqrt{5}y-5=0 \text{ d'où } T_P=T$$

3) $F(x)=\int_1^{e^x-e^{-x}+1}\sqrt{4+(t-1)^2}\,dt$, $x\geq 0$

a) La fonction $x\longmapsto e^x-e^{-x}+1$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et de plus la fonction $t\longmapsto\sqrt{4+(t-1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

$F'(x)=\sqrt{4+(e^x-e^{-x})^2}=(e^x+e^{-x})\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2}=(e^x+e^{-x})\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}=(e^x+e^{-x})^2$

b) $F(0)=\int_1^1\sqrt{4+(t-1)^2}\,dt=0$

Soit $x\geq 0$, $F'(x)=(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$, alors pour tout $x\geq 0$ on a :

$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+c$, or $F(0)=0$ donc $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+c=0\Longrightarrow c=0$

D'où pour tout $x\in[0,+\infty[$, $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x$.

c) $e^x-e^{-x}+1=\frac{5}{2}$, $x\in\mathbb{R}$, on pose : $t=e^x$

$e^x-e^{-x}+1=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2t^2-3t-2=0\Leftrightarrow t=2$ ou $t=\frac{-1}{2}<0$ *impossible car* $t=e^x>0$

$t=2\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln(2)$ donc l'équation $e^x-e^{-x}+1=\frac{5}{2}$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$, qui est $x=\ln(2)$.

d) $H: 4y^2=x^2-2x+5 \Leftrightarrow H: y^2=\frac{1}{4}(x^2-2x+5)$

On pose $h(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}$, $x\in\mathbb{R}$; on a : $H=(C_h)\cup(C_{-h})$, (courbes de h et $-h$)

(C_h) et (C_{-h}) sont symétriques par rapport à l'axe (Ox) .Alors :

$$\mathcal{A}=2\int_1^{\frac{5}{2}}h(x)dx=\int_1^{\frac{5}{2}}\sqrt{x^2-2x+5}\,dx=\int_1^{\frac{5}{2}}\sqrt{x^2-2x+5}\,dx=F(\ln(2))$$

$$\mathcal{A}=\left[\frac{1}{2}e^{2\ln(2)}-\frac{1}{2}e^{-2\ln(2)}+2\ln(2)\right]=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+2\ln(2)=\frac{15}{8}+2\ln(2)\quad(u.a)$$