DEVOIR DE CONTRÔLE N° 2

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle vrai ou fausse en justifiant la réponse.

1. *Soit f l'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le pont M' d'affixe z' tel que $z' = 3i\overline{z} - 2i - 2$.*
   Affirmation : *f est une similitude indirecte de rapport 3 de centre Ω d'affixe $1+i$ et d'axe la droite Δ d'équation $y = -x + 2$.*
2. *Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment $[AB]$. On désigne par $h_{(A,2)}$ l'homothétie de centre A et de rapport 2 , par $h_{(I,\frac{1}{2})}$ l'homothétie de centre I et de rapport $\dfrac{1}{2}$ et par $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.*
   Affirmation : $h_{(A,2)} \circ h_{(I,\frac{1}{2})} = t_{\overrightarrow{AB}}$.
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx$.*
   Affirmation : *La suite (I_n) est croissante.*

Exercice 2 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que :

$$AB = 2AD \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\mod 2\pi]$$

On désigne par I le milieu de $[AB]$ et par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$.

1. *Soi f la similitude indirecte qui envoie B sur I et I sur D.*
   (a) *Montre que f est de rapport $\sqrt{2}$.*
   (b) *Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω est le symétrique de D par rapport au point B.*
   (c) *Construire l'axe Δ de f.*
2. *On pose $g = f \circ S_{(AB)}$ où $S_{(AB)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (AB).*
   (a) *Déterminer $g(B)$ et $g(I)$.*
   (b) *Montrer que g est une similitude directe dont on précisera le rapport.*
   (c) *Montrer que g est d'angle égal à $-\dfrac{\pi}{4}$ et de centre le point C.*
3. *Soit $A' = g(A)$. Montrer que A' est le symétrique de I par rapport à D.*
4. *La demi-droite $[CA')$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en O'. Prouver que $O' = g(O)$.*

Exercice 3 (5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

1. *Vérifier que $I_1 = \dfrac{2}{3}$ et que $I_2 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5}$.*
2. *Vérifier que $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$.*
3. (a) *Montrer par intégration par parties que :$I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3}I_n$.*

(b) *Déduire par récurrence que* $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}$.

4. *On considère les deux fonctions F et G définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F(x) = \int_0^{\sin x} (1-t^2)^n dt \text{ et } G(x) = \int_0^x \cos^{2n+1}(t)dt.$$

(a) *Montrer que F et G sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *puis déterminer* $F'(x)$ *et* $G'(x)$.

(b) *Déduire que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = G(x)$.

(c) *Montrer alors que ,* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt$.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ *par* $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. *On désigne par* $\mathscr{C}_f$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. (a) *Vérifier que* $f'(x) = \frac{2x-x^3}{\sqrt{1-x^2}^3}$. *En déduire que f est une bijection de* $[0,1]$ *sur un intervalle J que l'on précisera.*

   (b) *A l'aide d'une intégration par parties montrer que :* $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$.

2. *Soit* $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}dt$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   (a) *Montrer que F est dérivable sur* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ *et calculer* $F'(x)$.

   (b) *En déduire que* $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$ *pour tout* $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   (c) *Calculer alors* $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$.

   (d) *En déduire que* $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = \frac{\pi-2}{8}$.

3. *On donne ci-dessous* $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_{f^{-1}}$. *Calculer l'aire de la partie du plan limité par* $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ *et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *(la partie hachurée).*