DEVOIR DE CONTROLE N° 2

Exercice 1 *(4 points)*

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante .Aucune justification n'est demandée.

1. Soit Δ une droite passant par un point O. Alors l'application $S_\Delta \ o \ R_{(O,\frac{\pi}{3})}$ est :

   A. une rotation. B. une symétrie glissante C. une symétrie orthogonale.

2. Soit Δ une droite du plan est $\vec{u}$ un vecteur normal à Δ alors $t_{\vec{u}} \ o \ S_\Delta$: est

   A. une symétrie orthogonale B. une symétrie glissante C. une symétrie centrale.

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt\right)$ est égale à :

   A. 0 B. $f(1)$ C. $+\infty$.

4. Soit f une fonction définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{3}x}{x^3+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Alors le volume du solide S obtenu par la rotation de $\mathcal{C}_f$ autour de l'axe des abscisses est :

   A. $\frac{8\pi}{9}$ B. $\frac{3\pi}{9}$. C. $\frac{12}{81}$.

Exercice 2 *(6 points)*

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et on désigne par O le milieu du segment [BC].

1. Montrer que le triangle OCA est équilatéral.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur A et B sur C.

   (b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre I.

   (c) En calculant $\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA}}\right)$, montrer que I appartient au segment [AB]
3. Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de foR.

   (b) Soit C' l'image de C par f.
   Déterminer $(foR)(C)$. En déduire que A est le milieu du segment $[CC']$
4. On désigne par g l'antidéplacement qui envoie O sur A et B sur C.

   (a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

   (b) Montrer que $g(C) = C'$

Exercice 3 *(4 points)*

Soit F la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_1^{\tan^2(x)} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$.

1. Montrer que F est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $F'(x) = 2$.
2. (a) Calculer $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

   (b) Déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$.
3. (a) Calculer, alors, $I = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$.

   (b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2} dt$.

Exercice 4 *(6 points)*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

1. Calculer I_0.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+2}$.

   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente est déterminer sa limite.
3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) \int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{x^2+1} dx$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+3)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)I_n$.

   (c) Calculer I_1.
4. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.
   On a représenté ci-contre les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé d'unité 2cm.
   Calculer en cm^2 l'aire de la partie hachurée.