

EXERCICE N: 1 ( 5 points )

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O tel que  $AB = 2 AD$  et

$(\widehat{AB}; \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . On désigne par I le milieu de [AB] et  $(\mathcal{C})$  le cercle circonscrit au rectangle ABCD .

1) Soit f la similitude indirecte qui transforme B en I et I en D .

a) Montrer que le rapport de f est  $\sqrt{2}$  .

b) Soit  $\Omega$  le centre de f. Montrer que  $\Omega$  est le symétrique de D par rapport au point B .

c) Construire l'axe  $\Delta$  de f .

2) On pose  $g = f \circ S_{(AB)}$  .

a) Déterminer  $g(B)$  et  $g(I)$  .

b) Montrer que g est une similitude directe et préciser son rapport et son angle .

c) Montrer que C est le centre de g .

3) Soit  $A' = g(A)$  . Montrer que  $A'$  est le symétrique de I par rapport à D .

4) La demi-droite  $[CA')$  recoupe  $(\mathcal{C})$  en  $O'$  . Prouver que  $O' = g(O)$  .

EXERCICE N: 2 ( 3 points )

1) Calculer l'intégral :  $\mathcal{C} = \int_1^2 \ln(t) dt$  .

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  , Montrer que pour tout entier k , tel que  $0 \leq k \leq n - 1$  on a :

$$\frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \leq \int_{1 + \frac{k}{n}}^{1 + \frac{k+1}{n}} \ln(t) dt \leq \frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{k+1}{n} \right) .$$

3) Soit la suite  $(J_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $J_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right)$  .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $J_n - \frac{1}{n} \ln(2) \leq \mathcal{C} \leq J_n$  .

b) Montrer que la suite  $(J_n)$  converge vers  $\mathcal{C}$  .

**EXERCICE N: 3 ( 6 points )**

1) a) Déterminer le reste modulo 13 de  $5^4$  .

b) En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers  $5^{4k}$ ,  $5^{4k+1}$ ,  $5^{4k+2}$  et  $5^{4k+3}$  avec  $k \in \mathbb{N}$  .

c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne par 13 de :  $a = 1318^{2012} + 91^{2011}$  .

d) Déterminer les entiers naturels  $n$  tels que :  $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$  .

2) Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} 5^k = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{n-1}$  .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $4 U_n = 5^n - 1$  .

b) Montrer que  $U_{2012}$  est divisible par 13 .

c) En utilisant la question 1) b) déterminer suivant les valeurs de  $n$  les restes modulo 13 de  $U_n$  .

**EXERCICE N: 4 ( 6 points )**

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$  .

On désigne par  $(C_f)$  la courbe de  $f$  dans le repère orthonormé  $R(O, \vec{i}, \vec{j})$  . ( Unité 2 cm )

On donne la fonction  $\varphi$  définie sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$  par :  $\varphi(x) = \int_0^{\sqrt{\sin x}} f(t) dt$  .

1) a) Montrer que  $\varphi$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$  et dérivable sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  et calculer  $\varphi'(x)$  .

b) En déduire que pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $\varphi(x) = \frac{x}{2}$  .

c) Trouver alors l'aire  $A$  de la région du plan limitée par la courbe  $(C_f)$  et les droites d'équations :

$$x=0 \text{ et } x = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

2) On pose :  $\psi(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\sin x}} \frac{\sqrt{1-t^4}}{t^3} dt$  .

a) Justifier l'existence de  $\psi(x)$  pour tout  $x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$  .

b) A l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout  $x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}[$  :

$$\psi(x) = \frac{\pi}{12} + \frac{(\sqrt{3}-x) - \cotg x}{2} .$$

c) Déterminer alors la valeur de  $\psi(\frac{\pi}{2})$  . Justifier la réponse