

Exercice1 :(6pts)

- 1) Démontrer les propositions suivantes.
 - a) $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$
 - b) Pour tout entier naturel n , 9 divise $7^{3n} - 1$.
 - c) Pour tout entier naturel n , $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.
- 2) a) donner suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 2^n par 7.
 b) En déduire que si n est pas multiple de 3 alors $2^{n+2} + 2^{n+1} + 1$ est divisible par 7.

Exercice2 :(7pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 b) Montrer, à l'aide une intégration par partie que

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$
- 2) Soit $F(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2} dt ; x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
 - a) Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et calculer $F'(x)$.
 - b) En déduire que $F(x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
 - c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ puis $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx$.
- 3) Sur la feuille annexe ci-jointe, on a représenté dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative de f^{-1} (où f^{-1} est la fonction réciproque de f).
 - a) Construire dans (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C_f) .
 - b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice3 : (7pts)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que $OA = 2 OC$ et

$(\widehat{OA, OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On pose $I = O * A$, $J = B * C$ et $L = I * J$. La perpendiculaire

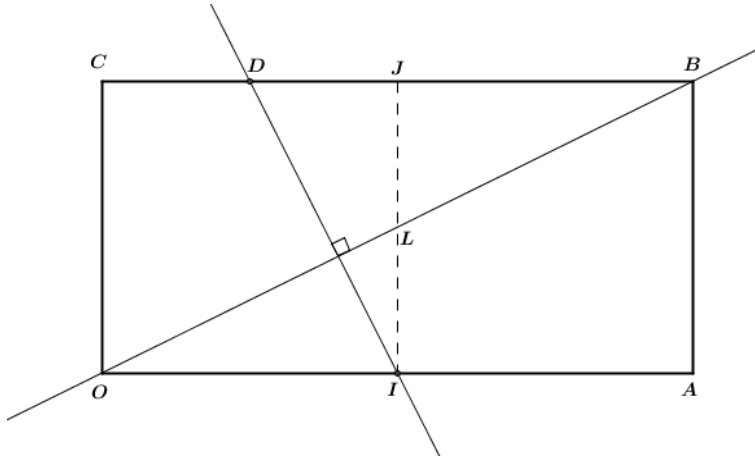
menée de I à la droite (OB) rencontre (BC) en un point D. Soit S la similitude directe telle que $S(O) = I$ et $S(A) = J$. (Voir feuille annexe)

- 1) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.
- 2) Déterminer $S(B)$ en utilisant les images des droites (OB) et (AB) par S.
- 3) Construire alors le point $E = S(C)$
- 4) Soit Ω le centre de S
 - a) Montrer que $S \circ S = h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}$
 - b) Montrer que $S \circ S(O) = L$. En déduire que $\Omega \in (OL)$
 - c) Soit $H = I * D$. Montrer que $S \circ S(I) = H$. En déduire que $\Omega \in (IH)$ et construire Ω .
- 5) Soit σ la similitude indirecte de centre Ω et telle que $\sigma(I) = O$.
 - a) Déterminer le rapport de σ .
 - b) Construire l'axe Δ de σ .
 - c) Soit K le symétrique de Ω par rapport à I.
Montrer que Δ est la médiatrice du segment [OK].

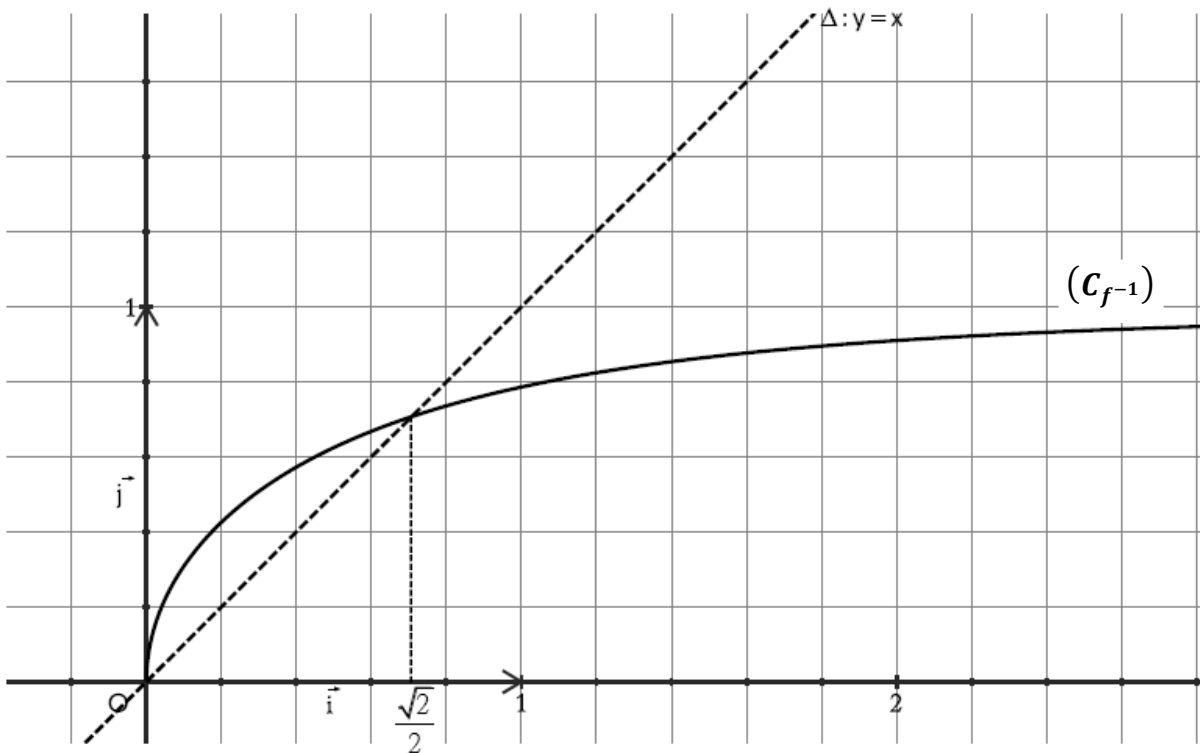
Bon Travail

Feuille Annexe

Exercice 3



Exercice 2



CORRECTION

Exercice1 :

1) Montrons que $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$.

$$2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{340} = (2^5)^{68} \equiv (-1)^{68} \pmod{11}$$

Ainsi $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$.

2) Montrons que pour tout entier naturel n , 9 divise $7^{3n} - 1$.

$$7^3 = 343 = 38 \times 9 + 1 \Rightarrow 7^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 7^{3n} \equiv 1 \pmod{9}.$$

3) Montrons que pour tout entier naturel n , $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

$$4^4 = 256 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow 4^{4n} \equiv 3^n \pmod{11}.$$

$$4^2 = 16 \equiv 5 \pmod{11}, 3^3 = 27 \equiv 5 \pmod{11}$$

donc $4^2 \equiv 3^3 \pmod{11}$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} 4^{4n} \equiv 3^n \pmod{11} \\ 4^2 \equiv 3^3 \pmod{11} \end{cases} \Rightarrow 4^{4n} \times 4^2 \equiv 3^n \times 3^3 \pmod{11}.$$

Ainsi $4^{4n} - 3^n \equiv 0 \pmod{11}$.

4) a) $2^0 \equiv 1 \pmod{7}$, $2^1 \equiv 2 \pmod{7}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{7}$, $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$, $2^4 \equiv 2 \pmod{7}$

...

$$\text{Si } n \equiv 0 \pmod{3} \quad 2^n = 2^{3p} = (2^3)^p \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\text{Si } n \equiv 1 \pmod{3} \quad 2^n = 2^{3p+1} \equiv 2 \pmod{7}$$

$$\text{Si } n \equiv 2 \pmod{3} \quad 2^n = 2^{3p+2} \equiv 4 \pmod{7}$$

b) Si n est multiple de 3 alors

$$2^{n+2} + 2^{n+1} + 1 \equiv (4 + 2 + 1) \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$$

Exercice2 :

1) a) f est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$,

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}x^2}{\sqrt{1-x^2}^2} = \frac{2x(1-x^2) + x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x-x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0 \quad \forall x \in [0,1[.$$

f est strictement \nearrow sur $[0,1[$

$$\text{donc } f \text{ réalise une bijection de } [0,1[\text{ sur } f([0,1[) = [f(0), \lim_{1^-} f[\\ = [0, +\infty[$$

b)

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx. \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = \left[-x\sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

2)

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

a) $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0,1] \supset \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ donc F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
 et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F'(x) = \cos x \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x |\cos x| = \cos^2 x$ puisque $x > 0$.

b) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F'(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right) + c, c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + c \text{ or } F(0) = 0 \text{ donc } c = 0$$

c)

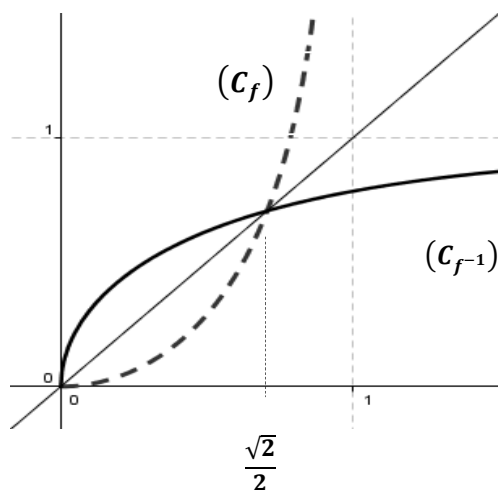
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2} dt = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

3) b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

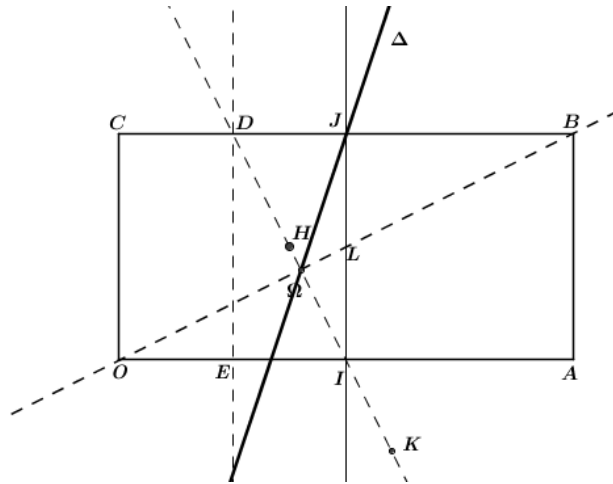
$$A = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x - f(x)) dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x dx - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = 2 \times \frac{1}{4} - 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

3)a)



Exercice3



1) $\begin{cases} S(O) = I \\ S(A) = J \end{cases}, k = \frac{IJ}{AO} = \frac{1}{2}, \theta \equiv (\widehat{OA, IJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

2) $\{B\} = (OB) \cap (BC) \Rightarrow \{S(B)\} = S((OB)) \cap S((BC)).$

Or $S((OB))$ est la perpendiculaire à (OB) passant par $S(O)=I$ qui est (ID)

$S((BC))$ est la perpendiculaire à (BC) passant par $S(A)=J$ qui est (BC) .

Ainsi $\{S(B)\} = (ID) \cap (BC) = \{D\}$.

De même $\{S(C)\} = S((OC)) \cap S((BC)) = (OA) \cap \delta$ où δ est la perpendiculaire à (BC) passant par $S(B) = D$.

3) Voir figure

4) a) $S \circ S$ est une similitude de rapport $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et d'angle $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$
et par suite $S \circ S = h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}$.

b) $S \circ S(O) = S(I)$, or $I = O * A \Rightarrow S(I) = S(O) * S(A) = I * J = L$

$S \circ S(O) = h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}(O) = L \Rightarrow \overrightarrow{\Omega L} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{\Omega O} \Rightarrow \Omega \in (OL).$

c) $S \circ S(I) = S(L)$, or $L = O * B \Rightarrow S(L) = S(O) * S(B) = I * D = H$

$S \circ S(I) = H$ alors $h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}(I) = H \Rightarrow \overrightarrow{\Omega H} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{\Omega I} \Rightarrow \Omega \in (IH).$

Ainsi $\Omega \in (IH) \cap (OL).$

5) a) Soit k' le rapport de σ . $k' = \frac{\Omega O}{\Omega I} = 2.$

b) On a $\sigma(I) = O$ alors Δ est la bissectrice de l'angle $\widehat{O\Omega I}$.

c) On a $\Omega O = 2\Omega I$ et $\Omega K = 2\Omega I$ car $S_I(\Omega) = K,$

$\Omega O = \Omega K$ implique $\Delta = \text{med } [OK].$

Fin