L.S.Avenue de la liberté *Jendouba*	DEVOIR DE CONTRÔLE N°2
19/02/2011--------------- 4ème Math	Mathématiques ------------- 3 heures Prof : -------------Gharbi Chaouki --------------------

EXERCICE 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte.
L'élève indiquera la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Soit f une fonction dérivable et positive sur [-1,1] telle que l'aire de la partie du plan définie par $\left\{M(x,y);\ y=f(x) \text{ et } -1\le x\le 1\right\}$ est égale à 4 u.a , alors :

a) Il existe un réel $c\in[-1,1]$ tel que $f(c)=$	a) 0 b) 2 c) 4
b) $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xf'(x)dx=$	a) f(0) b) f(1) c) f(1)-f(0)

2) Soit g l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z'=2i\bar{z}+1+i$ alors $g\circ g$ est une :

a) Similitude indirecte de rapport 4 et de centre $\Omega(-1-i)$
b) Homothétie de rapport 4 et de centre $\Omega(-1-i)$
c) Homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-1-i)$

3) Soit h une fonction continue sur un intervalle I et $1\in I$ alors $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x h(t)dt$ est égale à :

a) 0	b) h(1)	c) $+\infty$

EXERCICE 2 : (5 points)

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en dinars est demandée.
Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.
Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.
Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.
Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 dinars,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 dinars,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V : l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».
J : l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».
R : l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».
G_{100} : l'évènement « le joueur a gagné 100 dinars »
G_{20} : l'évènement « le joueur a gagné 20 dinars »

1) a) Calculer les probabilités p(V) et p(J)
   b) Représenter un arbre des probabilités qui modélise la situation, en précisant la probabilité associée à chaque branche
   c) Montrer que $p(R)=\frac{29}{80}$.
2) On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.
   a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X
   c) Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X)=\frac{140-51m}{80}$.
   d) L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en dinars. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?
3) On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geq 1$.
   Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

EXERCICE 3 : (6 points)

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AC] et [BC]
(Voir la figure1 à la page 4 : à compléter le long de cet exercice)

1) Soit f la similitude directe qui envoie A en C et C en B
   a) Préciser le rapport et l'angle de f
   b) Soit Ω le centre de f. Montrer que $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C}=-\Omega A^2$ et déduire que $\overrightarrow{\Omega A} \perp \overrightarrow{\Omega I}$
   c) Déterminer $f \circ f(A)$ et déduire que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BI)
2) Soit g la similitude directe de centre B qui envoie A en C
   a) Préciser le rapport et l'angle de g
   b) Caractériser alors $R=g \circ f^{-1}$
3) On pose $\sigma=f \circ S_{(BC)}$ et D=R(A)
   a) Déterminer $\sigma(D)$ et $\sigma(C)$
   b) Déterminer la nature et le rapport de σ
   c) On note Ω' le centre de σ. Déterminer $\sigma \circ \sigma(D)$ et déduire la construction de Ω'
4) On suppose que $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé direct
   a) Déterminer la transformation complexe de f
   b) En déduire que A, Ω et Ω' sont alignés

EXERCICE 4 : (6 points)

Soit la fonction g définie sur $[0,1[$ par $g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

On désigne par $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer g réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera

   b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que : $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g(x)dx=-\dfrac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx$

2) Soit $G(x)=\int_0^{\sin(x)}\left(\sqrt{1-t^2}\right)dt$; $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

   a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer $G'(x)$

   b) En déduire que $G(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin(2x)$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

   c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx$ puis $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g(x)dx$

3) Sur la feuille annexe ci-jointe (**page 4**) on a représenté dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2+4}}}$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une demi –tangente verticale au point d'abscisse 0

   La droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale pour la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

   a) Montrer que $f(x)=g^{-1}(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[$

   b) Construire $\mathscr{C}_g$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

   c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

BON TRAVAIL

ANNEXE : A rendre avec la copie :

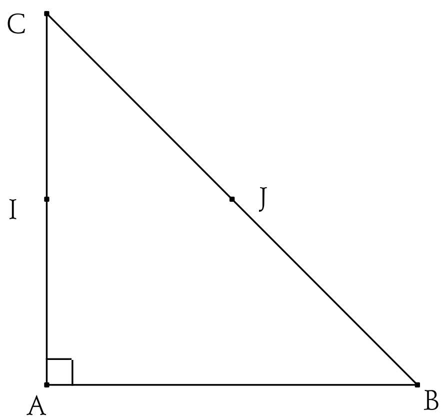
Nom & prénom :…………………………………………………………………………	N° :…………………

EXERCICE 1 :

1) a)	1) b)	2)	3)

EXERCICE 3 :

Figure1 :



EXERCICE 4 :