

**Exercice n°2 : (4 points)**

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - (1 + i)(i + e^{i\theta})z + i(i + e^{i\theta})^2 = 0$  avec  $\theta \in ]0, \pi[$

1) a) Résoudre l'équation (E).

b) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points A ; M' M'' d'affixes respectives  $a = -1 + i, z' = i + e^{i\theta}$  et  $z'' = i(i + e^{i\theta})$

Déterminer et construire les ensembles des points M' et M'' lorsque  $\theta$  décrit  $]0, \pi[$

3) a) Montrer que OM'M'' est un triangle rectangle isocèle en O.

b) Montrer que  $\frac{z' - a}{z'' - a} = -\cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . En déduire que les points A, M' et M'' sont alignés.

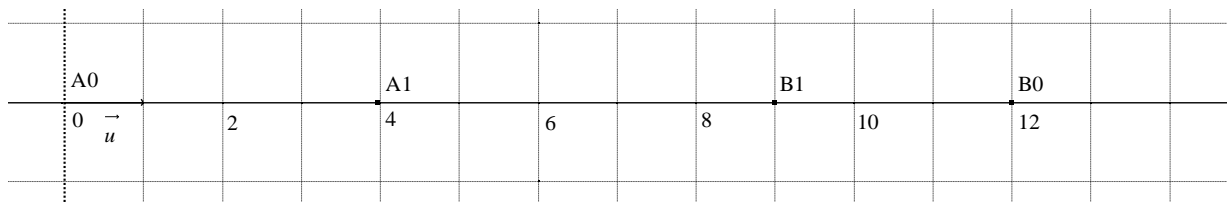
c) Déterminer l'affixe du point M pour que OM'MM'' est un carré.

**Exercice n°1 : (5 points)**

1) On considère les suites de points  $A_n$  et  $B_n$  définies pour tout entier naturel  $n$  de la manière suivante : sur un axe orienté  $(O; \vec{u})$  donné ci-dessous, le point  $A_0$  a pour abscisse 0 et le point  $B_0$  a pour abscisse 12.

Le point  $A_{n+1}$  est le barycentre des points  $(A_n, 2)$  et  $(B_n, 1)$ , le point  $B_{n+1}$  est le barycentre des points pondérés  $(A_n, 1)$  et  $(B_n, 3)$ .

a) Sur le graphique placer les points  $A_2, B_2$ . (Reproduire la figure sur votre copie)



b) On définit les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  des abscisses respectives des points  $A_n$  et  $B_n$ .

Montrer que :  $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$  et que  $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$

3) On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = b_n - a_n$ .

a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique, préciser la raison.

b) Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ .

3) a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $a_n \leq b_n$

b) Montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.

4) On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = 3a_n + 4b_n$ .

a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est constante.

b) Déterminer la limite commune des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

### Exercice n°3 :(5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que  $(\widehat{AB, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

$E = C * D, F = C * B$  et I le point du plan tel que CIA soit un triangle équilatéral direct

1) a) Vérifier que  $(\widehat{AD, AI}) \equiv \frac{\pi}{12} (2\pi)$  Montrer que :  $r_{(A, \frac{\pi}{6})} = S_{(AI)} \circ S_{(AD)}$

Déterminer la droite  $\Delta$  telle que  $r_{(I, \frac{\pi}{3})} = S_{\Delta} \circ S_{(IA)}$

b) Dédire la nature et les éléments caractéristiques de  $h = r_{(I, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{6})}$

2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que  $f(C) = B$  et  $f(E) = F$

b) Montrer que f est la rotation de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

c) Montrer que  $f(D) = C$

3) Soit g le antidéplacement tel que  $g(D) = C$  et  $g(C) = B$

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) On désigne par  $\Delta$  et  $\vec{u}$  l'axe et le vecteur de g.

Montrer que  $g \circ g = t_{2\vec{u}}$  et déterminer  $\vec{u}$  et  $\Delta$

### Exercice n°4 :(6 points)

Soit la fonction f définie sur  $[0, \pi[$  par  $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f réalise une bijection de  $[0, \pi[$  sur  $[0, +\infty[$

c) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et que pour tout  $x \geq 0$  :  $(f^{-1})' = \frac{2}{1+x^2}$

2) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose  $g(x) = f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ .

a) Montrer que g est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $g'(x)$

b) Calculer  $f^{-1}(1)$ . En déduire que pour tout  $x > 0$  :  $f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi$

3) On pose pour tout entier non nul n :  $a_n = \frac{1}{n+1} \sum_n^{2n} f^{-1}(\sqrt{k})$  et  $b_n = \frac{1}{n+1} \sum_n^{2n} f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

a) Montrer que pour tout entier non nul n :  $f^{-1}(\sqrt{n}) \leq a_n \leq f^{-1}(\sqrt{2n})$

b) En déduire que  $(a_n)$  est convergente et calculer sa limite.

c) Exprimer  $b_n$  en fonction de  $a_n$  et déterminer la limite de  $b_n$ .