DEVOIR DE SYNTHESE

Deuxième trimestre

SECTION : SCIENCES DE L'INFORMATIQUE

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES **DUREE : 3 h** **COEFFICIENT : 3**

Exercice 1 : (4 points)

1) Soit x un entier non nul. Si $x \equiv 9 \pmod{10}$ alors :

a) $x^{402} \equiv 1 \pmod{10}$ **b)** $x^{402} \equiv -1 \pmod{10}$ **c)** $x^{402} \equiv 9 \pmod{10}$.

2) Soit u la suite définie sur IN* par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b)** (u_n) est majorée par 1 **c)** $u_n \geq n$ pour tout $n \in$ IN*

3) Le quotient de la division Euclidienne de −20 par 7 est :

a) −3 **b)** − 2 **c)** 2.

4) La limite de la suite de terme général : $u_n = \ln\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est :

a) $+\infty$ **b)** $-\infty$ **c)** 0

Exercice 2 : (5 points)

1) Déterminer le reste modulo 13 de 5^4.

2) En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers 5^{4k}, 5^{4k+1}, 5^{4k+2}, 5^{4k+3} avec $k \in$ IN.

3) Déterminer les restes modulo 13 de chacun des entiers $5^{202020202041}$ et $5^{555555555555}$.

4) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n, tels que $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$.

Exercice 3 : (6 points)

A- Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x)$

1) Dresser le tableau de variation de g

2) **a)** Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$

c) En déduire suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

3) a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $g(1)$ et déduire $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

B- Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)(1-\ln x)$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que : pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) et de la droite $(O,\vec{i})$.

3) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

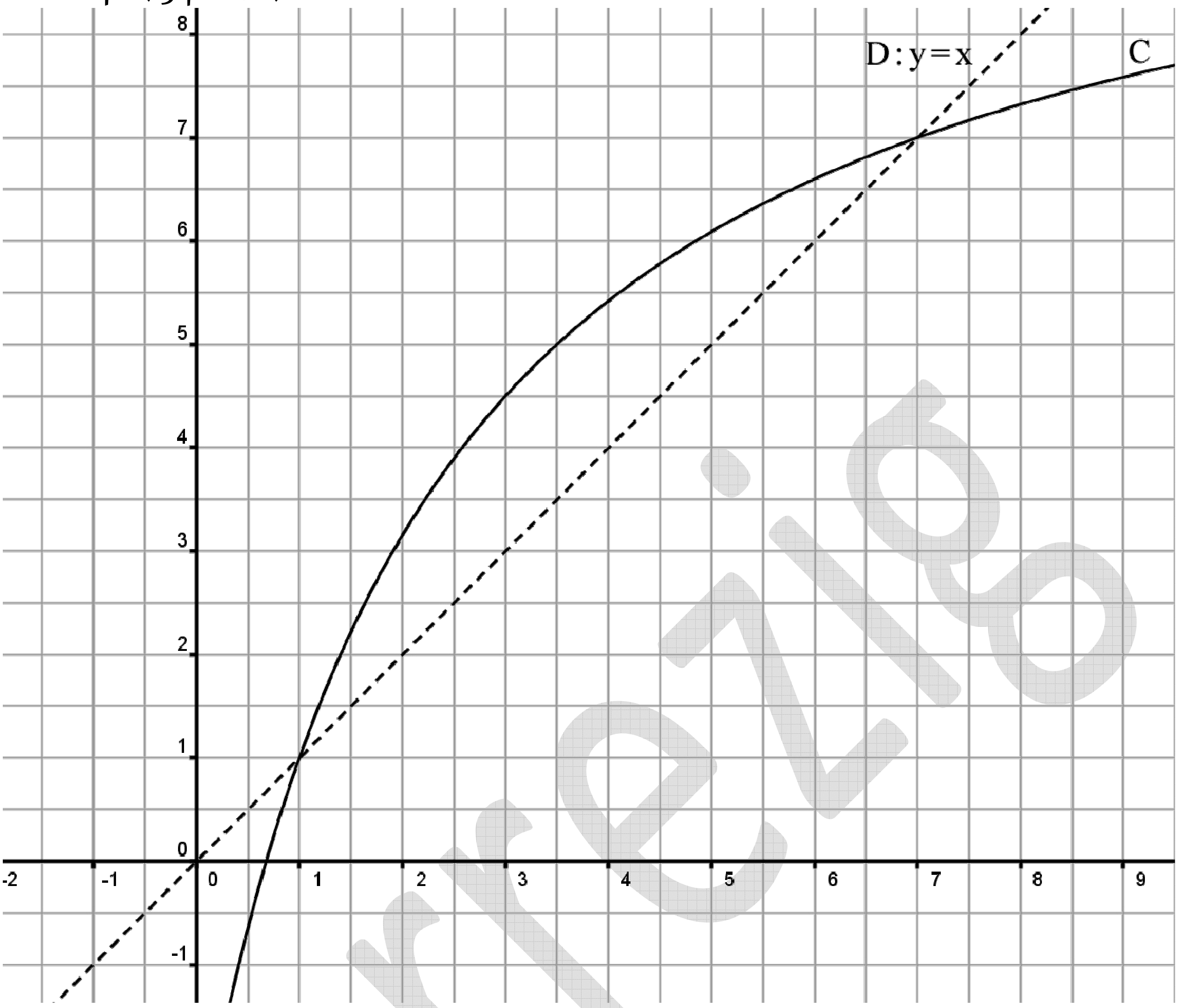
4) Soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} F(x) = (x^2-2x)(1-\ln x) & \text{si } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0.

b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $F'(x) = 2 - x + 2f(x)$

c) En déduire la primitive de f sur $]0,+\infty[$; qui s'annule en 1.

Exercice 4 : (5 points)



On représente ci-dessus la courbe C d'une fonction f et la droite D : y = x

1) Utiliser le graphique pour justifier la proposition suivante : $f(x) > x$ pour $x \in [1,7]$

2) (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in$ IN

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

3) (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$ pour tout $n \in$ IN

a) Placer sur l'axe des abscisses les points w_1, w_2 et w_3

b) Montrer par récurrence que $1 \leq w_n \leq 7$ pour tout $n \in$ IN

c) Montrer que (w_n) est croissante.

d) En déduire que (w_n) est convergente et calculer sa limite.

CORRECTION :

Exercice 1 : (4 points)

1) a) $x^{402} \equiv 1 \pmod{10}$ **2) c)** $u_n \geq n$ pour tout $n \in IN^*$ **3) a)** -3 **4) b)** $-\infty$	**1 x 4**

Exercice 2 : (5 points)

1) $5 \equiv 5[13]$, $5^2 \equiv 12[13] \Leftrightarrow 5^2 \equiv -1[13]$ donc $5^4 \equiv 1[13]$	**0,5**
2) $5^4 \equiv 1[13] \Leftrightarrow 5^{4k} \equiv 1[13]$ $5^{4k+1} \equiv 5[13]$, $5^{4k+2} \equiv 12[13]$, $5^{4k+3} \equiv 8[13]$	**2**
3) Le reste de la division Euclidienne de 202020202041 par 4 est 1 donc $5^{202020202041} \equiv 5[13]$ Le reste de la division Euclidienne de 555555555555 par 4 est 3 donc $5^{555555555555} \equiv 8[13]$	**1**
4) $5^{2n} + 5^n \equiv 0[13]$ donc 13 divise $5^{2n} + 5^n = 5^n\left(5^n + 1\right)$ or 5^n et 13 sont premiers entre eux donc 13 divise $5^n + 1$ d'où $5^n + 1 \equiv 0[13] \Leftrightarrow 5^n \equiv -1[13] \Leftrightarrow 5^n \equiv 12[13]$ ainsi $n = 4k+2$, $k \in IN$	**1,5**

Exercice 3 : (6 points)

A- Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$

1) g est dérivable sur $]0,+\infty[$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) < 0$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline g(x) & +\infty & \searrow & 0 & \searrow & -\infty \end{array}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$	**0,5**
2) a) g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ don elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g\left(]0,+\infty[\right)$ or g est continue sur $]0,+\infty[$ donc $g\left(]0,+\infty[\right) = \left]\lim\limits_{+\infty} g \text{ , } \lim\limits_{0^+} g\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$	**0,5**
b) g est une bijection continue de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un seul réel $\alpha \in]0,+\infty[$ tels que $g(\alpha) = 0$ ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$. $g(1,7) = \frac{1}{1,7} - \ln(1,7) \approx 0,06$ et $g(1,8) = \frac{1}{1,8} - \ln(1,8) \approx -0,03$ donc $g(1,7) \times g(1,8) < 0$ D'où $1,7 < \alpha < 1,8$	**1**
c) D'après le tableau de variation de g : $g(x) < 0$ si $x > \alpha$ et $g(x) > 0$ si $0 < x < \alpha$	**0,5**
3) a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ donc g^{-1} est dérivable sur $g\left(]0,+\infty[\right) = \mathbb{R}$.	**0,5**

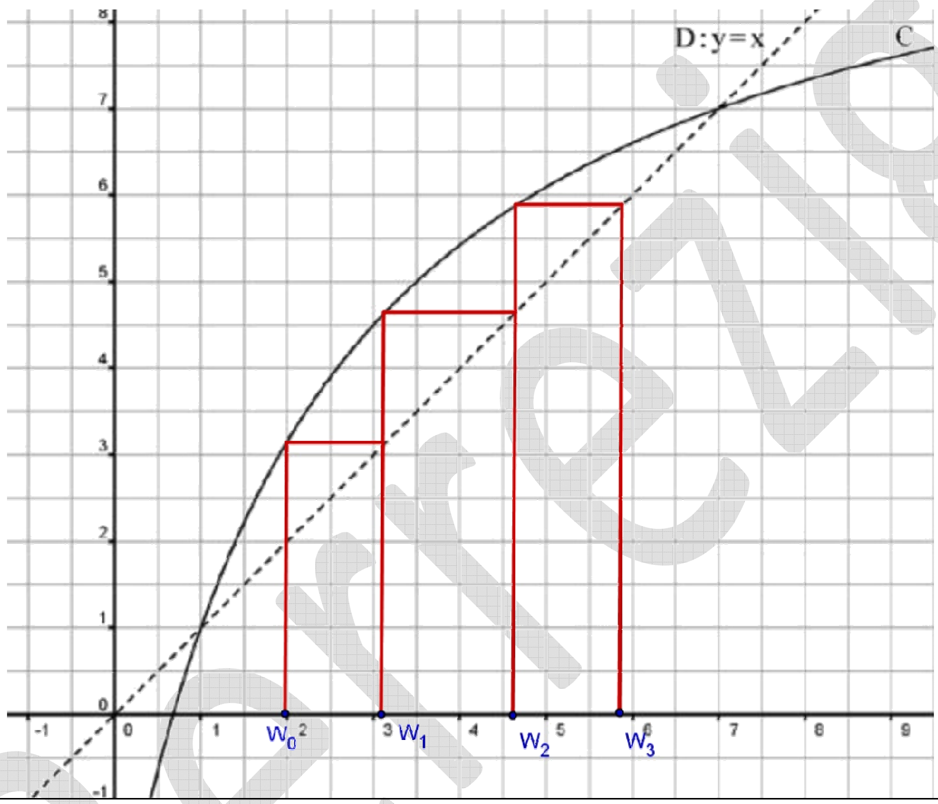
b) $g(1)=\frac{1}{1}-\ln(1)=1$, $\left(g^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(1)\right)}=\frac{1}{g'(1)}=-\frac{1}{2}$.	**0,75**

B- Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=(x-1)(1-\ln x)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$, pour tout $x>0$, $f'(x)=1\times(1-\ln(x))+(x-1)\times\left(-\frac{1}{x}\right)$ $=1-\ln(x)-1+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\ln(x)=g(x)$	**0, 5**
b) le signe de f' est celui de g $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline f(x) & & & f(\alpha) & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & -\infty & & & & -\infty \end{array}$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)(1-\ln x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)(1-\ln x)=-\infty$	**0, 5**
2) $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(1-\ln x)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $\ln(x)-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=e$ les points d'intersection de la courbe (C) et de la droite $(O,\vec{i})$ sont $A(1,0)$ et $B(e,0)$	**0,5**
3) $T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$ $T: y=x-1$	**0,25**
4) Soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} F(x)=(x^2-2x)(1-\ln x) & \text{si } x>0 \\ F(0)=0 \end{cases}$ **a)** $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-2x)(1-\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-2x-x^2\ln x+2x\ln x)=0=F(0)$ donc F est continue à droite en 0. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(x^2-2x)(1-\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(x-2)(1-\ln x)=-\infty$ Donc F n'est pas dérivable à droite en 0.	**0,5**
b) Pour tout $x>0$ on a : $F'(x)=(2x-2)(1-\ln x)+(x^2-2x)\left(-\frac{1}{x}\right)=2(x-1)(1-\ln x)-x+2$ d'où $F'(x)=2-x+2f(x)$	**0,5**
c) $F'(x)=2-x+2f(x) \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left(F'(x)+x-2\right)$ ainsi une primitive de f est $G(x)=\frac{1}{2}\left(F(x)+\frac{1}{2}x^2-2x\right)+c$, $c\in IR$. $G(1)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(F(1)+\frac{1}{2}-2\right)+c=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{5}{4}$ $G(x)=\frac{1}{2}\left(F(x)+\frac{1}{2}x^2-2x\right)+\frac{5}{4}$	**0,5**

Exercice 4 : (5 points)

On représente ci-dessus la courbe C d'une fonction f et la droite

1) pour tout $x \in [1,7]$ la courbe C de f est au dessus ou sur la droite D : y = x donc $f(x) \geq x$	**0,5**
2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$ $u_1 = f(u_0) = f(1) = 1$, $u_2 = f(u_1) = f(1) = 1$, $u_3 = f(u_2) = f(1) = 1$ et $u_4 = f(u_3) = f(1) = 1$ la suite (u_n) est constante.	**1**
3) (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = f(w_n) \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$ **a)**  	**0.75**
b) Pour n = 0 , $w_0 = 2$ ainsi $1 \leq w_0 \leq 7$ donc la proposition est vraie pour n = 0. Supposons que pour un $n > 0$, $1 \leq w_n \leq 7$ Montrons que $1 \leq w_{n+1} \leq 7$ $1 \leq w_n \leq 7$ comme f est croissante sur $[1,7]$ donc $f(1) \leq f(w_n) \leq f(7)$ par suite $1 \leq w_{n+1} \leq 7$ D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq w_n \leq 7$	**1**
c) Pour tout $x \in [1,7]$, $f(x) > x$ or $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq w_n \leq 7$ donc $f(w_n) \geq w_n$ d'où $w_{n+1} \geq w_n$ La suite (w_n) est croissante	**1**
d) La suite (w_n) est croissante et majorée par 7 don elle converge vers une limite $\ell \in [1,7]$ et comme $w_{n+1} = f(w_n)$ et f est continue sur $[1,7]$ donc ℓ est la solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ donc $\ell = 1$ ou $\ell = 7$ comme (w_n) est croissante donc $\ell = 7$	**0,75**