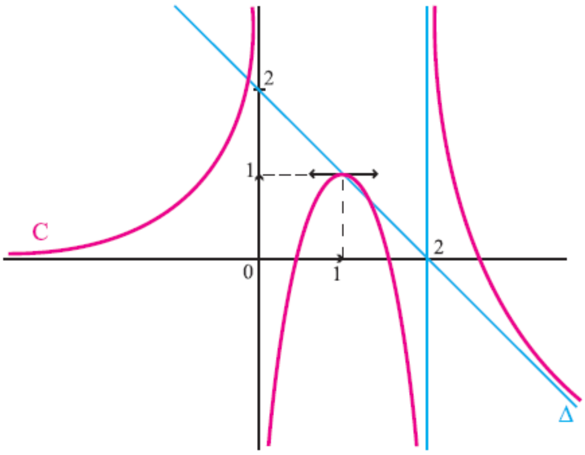
Exercice 1 ;(5 points)

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur **R** \ {0,2} et telle que $f(-\frac{1}{2})=1$

La droite Δ et les droites d'équations respectives x = 0,x = 2 et y = 0 sont des asymptotes à la courbe C.



1) Déterminer graphiquement

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x+1)$,

$\lim_{n\to+\infty} f(\frac{3^n+1}{4^n+5})$

$\lim_{x\to+\infty} f(-x^2+\sin(x))$

2) a) f o f est-elle continue sur $]-\infty,-\frac{1}{2}]$?

b) Etudier les variations de f o f sur $]-\infty,-\frac{1}{2}]$

c) Déduire que l'équation f o f(x) = 0 admet une seule solution dans $]-\infty,-\frac{1}{2}[$

Exercice 2 :(3 points)

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse
(si la réponse est VRAI, donner une justification rapide ; si la réponse est FAUX, donner un contre-exemple) :

1) Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang

2) Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ est minorée

3) Le nombre complexe $j=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine $2011^{\text{ième}}$ de 1.

Exercice 3(6 points)

Soient f et g deux fonctions continues sur [0, 1] à valeurs dans [0, 1] et telles que pour tout x de [0, 1], f o g(x) =g o f(x).
On se propose de montrer qu'il existe un réel c de [0, 1] tel que f(c) = g(c).

1) Soit h la fonction définie par : h(x) = f(x) – x.

a) Montrer que h s'annule en au moins un réel a de [0, 1].

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n ≥ 1, $g^n(a)=f\left[g^n(a)\right]$

où $g^n=\underbrace{gogo...og}_{\text{n fois g}}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur IN* par : $u_n=g^n(a)$.

a) Vérifier que $f(u_n)=u_n$ et que $g(u_n)=u_{n+1}$.

b) On suppose que la suite (u_n) est monotone.

Montrer alors qu'elle est convergente vers un rées ℓ.
Que peut-on dire de f(ℓ) et g(ℓ) ?
c) On suppose que la suite (u_n) n'est pas monotone.

Montrer qu'il existe deux réels p et q tels que le produit $(f-g)(p)\times(f-g)(q)$ soit négatif.

3) Conclure

Exercice 4 :(6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

Soit f l'application du plan P \ { I } dans lui-même qui a tout point M(z) associe le point M'(f(z)) telle que $f(z) = z' = \dfrac{-1+z}{1-\bar{z}}$

1) Montrer que, pour tout $z \neq 1$, $|z'| = 1$,

2) Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b différents de 1 et tels que f(A) = f(B)

a) Montrer $(a-1)(1-\bar{b}) = (1-\bar{a})(b-1)$

b) Déduire que les points A, B et I sont alignés.

3) Soit α, un réel appartenant à $]0, 2\pi[$:

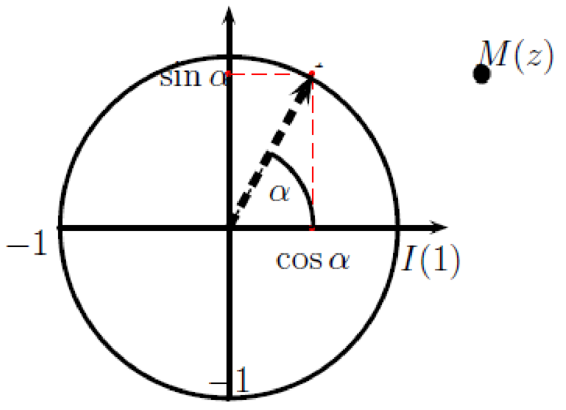
Montrer $f(e^{i\alpha}) = e^{i\alpha}$.

4) Etant donner un point M du plan d'affixe $z\neq 1$.

a) Montrer que si $z' \neq 1$ alors $f(z) = f(z')$

b) Déduire alors de ce qui précède une construction du point M'(z')

puis le placer sur la figure ci contre



Exercice 4 bac Sc : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{OI}$,$\overrightarrow{OJ}$).

À tout point M d'affixe z distinct de I , est associé le point M' d'affixe z' définie par: z' =$\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

1) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que z' soit imaginaire non nul.

2) a) Vérifier que pour tout z on a : z' – 1 =$\frac{-2i}{\bar{z}+i}$

b) En déduire que pour tout point M distinct de J, on a :

IM' . JM = 2 et ($\overrightarrow{JM}$,$\overrightarrow{IM'}$)≡ $\frac{-\pi}{2}\,[2\pi]$.

c) Déduire une construction du point M' lorsque M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon 1.

3) a) Résoudre dans C l'équation :$z^3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b) Soit $\alpha \in]0,2\pi[$, montrer que z' = $e^{i\alpha}$ équivaut à z = - cotan$\frac{\alpha}{2}$

c) Déduire alors les solutions de l'équation :

$$(\bar{z}-i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\,(\bar{z}+i)^3$$