

Exercice 1: (3pts)

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

- 1) Soit z un nombre complexe. $|z - i|$ est égale à :
 - a) $|z| + 1$; b) $\sqrt{z^2 + 1}$; c) $|iz + 1|$
- 2) Soit f et g deux fonctions définies sur $]-\infty, 2]$ tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et pour tout $x \leq 1$, $g(x) = 4x + 2\sqrt{2-x}$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) =$:
 - a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 1
- 3) $(\sqrt{3} + i)^{2010}$
 - a) appartient à \mathbb{R}_+ ; b) appartient à \mathbb{R}_- ; c) est imaginaire pur.
- 4) Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par $U_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
 - a) (U_n) converge vers 0 ; b) (U_n) est divergente ; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$.

Exercice 2: (5 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x + 1} - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 3) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]-\frac{1}{2}, 0[$.
b) On déduit que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$

Exercice 3 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$.

- 1) Etudier le sens de variation de f sur $[2, +\infty[$.
- 2) Soit la suite définie par : $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$.
 - b) Montrer que (U_n) est décroissante.
 - c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4: (7 pts)

- 1) a) Calculer $(1 - 2\sqrt{3}i)^2$.
b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0$.
c) Mettre les solutions sous formes exponentielles.
- 2) dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et M d'affixes respectives $i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} e^{i\theta}$ avec $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
 - a) Montrer que $z_M - z_A = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire la distance AM en fonction de θ .
 - b) Déterminer θ pour que le triangle OAM soit isocèle en A.
- 3) On désigne par B' le symétrique de B par rapport à l'axe $[O, \vec{u})$ et N le point du plan tel que OB'NM soit un parallélogramme.
 - a) Déterminer les affixes des points B' et N.
 - b) Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Bon Travail

Correction

Exercice 1: (3pts)

- 1) c) $|z - i| = |-i(iz + 1)| = |iz + 1|$
- 2) b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x + 2\sqrt{2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x + 2\sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x - 2x\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(4 - 2\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}\right) = -\infty$
- 3) b) $(\sqrt{3} + i)^{2010} = (2e^{i\pi/6})^{2010} = 2^{2010} e^{i\frac{2010\pi}{6}} = 2^{2010} e^{i335\pi} = 2^{2010} e^{i\pi} = -2^{2010}$.
- 4) a) $\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Exercice 2: (5 pts)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+x+1}-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{(\sqrt{x^2+x+1}+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{(\sqrt{x^2+x+1}+x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{(\sqrt{x^2+x+1}+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$

2) $\forall x \in]-\infty, 0[, -1 \leq -\cos(\pi x) \leq 1 \Rightarrow x \leq x+1-\cos(\pi x) \leq x+2$

On multiplie par $\frac{1}{x}$ ($x < 0$) on obtient $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

3) $x \mapsto x+1-\cos(\pi x)$ et $x \mapsto x$ sont continues sur $]-\infty, 0[$.

Donc $x \mapsto \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x}$ est continue sur $]-\infty, 0[$.

$x \mapsto x^2+x+1$ est continue et positive ($\Delta < 0$) sur $]0, +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}-x$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+x+1}-x = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{u(x)-u(0)}{x-0} \text{ avec } u(x) = x+1-\cos(\pi x).$$

$$= u'(0) = 1 = f(0).$$

f est continue en 0 et par suite f est continue sur IR.

4) a) f est continue sur IR en particulier sur $] -\frac{1}{2}, 0[$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2} + 1 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -1 < 0, f(0) = 1 > 0$$

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $] -\frac{1}{2}, 0[$.

b) On a $\alpha < 0$ et $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha + 1 - \cos(\pi\alpha)}{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha + 1 - \cos(\pi\alpha) = 0$
 $\Rightarrow \cos(\pi\alpha) = \alpha + 1 \Rightarrow \cos^2(\pi\alpha) = (\alpha + 1)^2 \Rightarrow 1 - \sin^2(\pi\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 1$
 $\Rightarrow \sin^2(\pi\alpha) = -\alpha^2 - 2\alpha = -\alpha(\alpha + 2) > 0$
 $\Rightarrow \sin(\pi\alpha) = \sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$ ou $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$.
 Or $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, $-\frac{\pi}{2} < \pi\alpha < 0$ et donc $\sin(\pi\alpha) < 0$.
 Par suite $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$.

Exercice 3 : (6 pts)

On a $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$.

1) f est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en particulier sur $[2, +\infty[$.

et $\forall x \in [2, +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x(2x-2) - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2} = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2} > 0$. Ainsi f est strictement ↗ sur $[2, +\infty[$.

2) a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$.

- Pour $n = 0$, $U_0 = 4 > 2$.

- Supposons que $U_n \geq 2$ et montrons que $U_{n+1} \geq 2$.

Si $U_n \geq 2$ alors $f(U_n) \geq f(2)$ [f ↗] $\Rightarrow U_{n+1} \geq 2$ ($f(2) = 2$).

D'où $U_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \frac{U_n^2}{2U_n-2} - U_n = \frac{U_n^2 - U_n(2U_n-2)}{2U_n-2} = \frac{-U_n^2 + 2U_n}{2U_n-2}$
 $= \frac{U_n(-U_n+2)}{2U_n-2} < 0$. Puisque $U_n \geq 2 \forall n$ et par suite (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante est minorée par 2 donc converge vers un réel ℓ vérifiant : $f(\ell) = \ell$ et $\ell \geq 2$.

$$f(\ell) = \ell \text{ signifie } \frac{\ell^2}{2\ell-2} = \ell \text{ signifie } \frac{\ell(-\ell+2)}{2\ell-2} = 0 \text{ signifie } \ell = 2 \text{ ou } \ell = 0$$

Comme $\ell \geq 2$ alors $\ell = 2$. Conclusion : (U_n) converge vers 2.

Exercice 4: (7 pts)

1) a) $(1 - 2\sqrt{3}i)^2 = 1 - 4\sqrt{3}i + (2\sqrt{3}i)^2 = 1 - 4\sqrt{3}i - 12 = -11 - 4\sqrt{3}i.$

b) $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0.$

$$\Delta = 1 - 4(3 + i\sqrt{3}) = -11 - 4i\sqrt{3} = (1 - 2\sqrt{3}i)^2.$$

$$z_1 = \frac{1 - (1 - 2\sqrt{3}i)}{2} = \sqrt{3}i, \quad z_2 = \frac{1 + (1 - 2\sqrt{3}i)}{2} = 1 - \sqrt{3}i$$

c) $z_1 = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}}$

$$|z_2| = |1 - \sqrt{3}i| = 2. \text{ soit } \theta \text{ un argument de } z_2.$$

On a $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ce qui donne que $\theta \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$ et alors

$$z_2 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

2) a) $z_M - z_A = \sqrt{3}e^{i\theta} - \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}} = \sqrt{3} \left[e^{i\theta} - e^{\frac{i\pi}{2}} \right].$

Rque :

Soit α et β deux réels

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} - e^{i\beta} &= e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\beta}{2}} e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}} e^{\frac{i\beta}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}} = e^{\frac{i\alpha+\beta}{2}} e^{\frac{i\alpha-\beta}{2}} - e^{\frac{i\alpha+\beta}{2}} e^{-\frac{i\alpha-\beta}{2}} \\ &= e^{\frac{i\alpha+\beta}{2}} \left[e^{\frac{i\alpha-\beta}{2}} - e^{-\frac{i\alpha-\beta}{2}} \right] = 2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{\frac{i\alpha+\beta}{2}}. \end{aligned}$$

On a alors $z_M - z_A = \sqrt{3} \left[2i \sin\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}\right)} \right] = 2\sqrt{3}i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$

$$AM = |z_M - z_A| = \left| 2\sqrt{3}i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right| = 2\sqrt{3} \left| \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

Or $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$

D'où $AM = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$

b) OAM isocèle en A équivaut à

$$AM = OA \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = |z_A| \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{12} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \theta = \frac{13\pi}{12} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Or $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ alors $\theta \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi].$

3) a) B' est le symétrique de B par rapport à l'axe $[O, \vec{u}]$ alors $z_{B'} = \overline{z_B} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$.

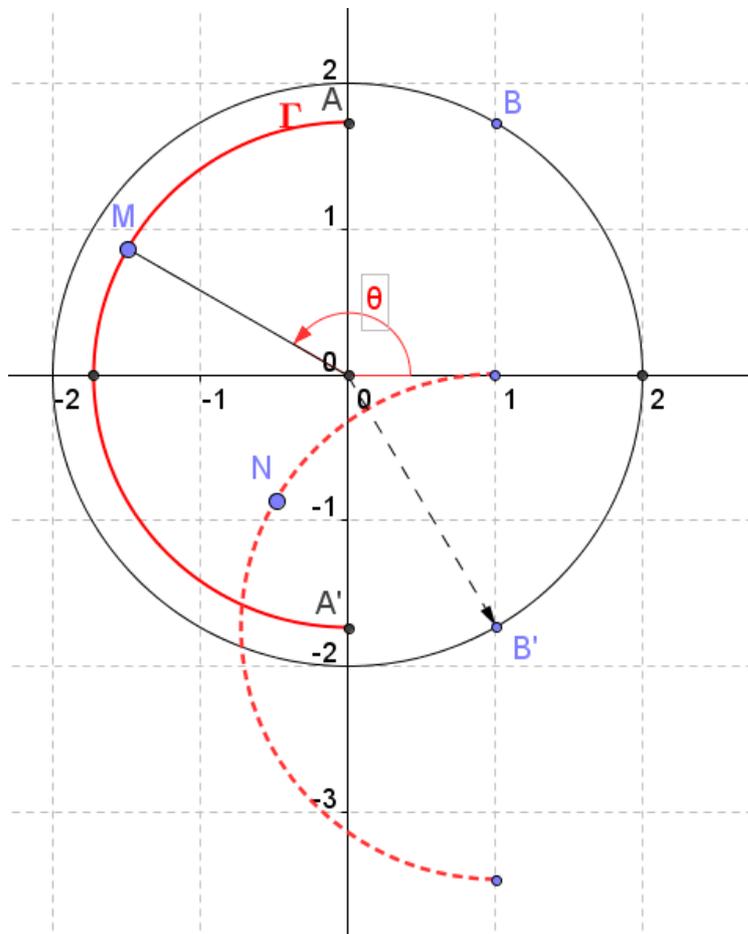
OB'NM soit un parallélogramme signifie $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{MN}$

Signifie $2e^{\frac{i\pi}{3}} = z_N - \sqrt{3}e^{i\theta}$ signifie $z_N = 2e^{\frac{i\pi}{3}} + \sqrt{3}e^{i\theta}$.

b) On remarque que N est l'image du point M par la translation du

vecteur $\overrightarrow{OB'}$. Or $|z_M| = \sqrt{3}$ et $\arg(z_M) \equiv \theta[2\pi]$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ donc M décrit le demi-cercle Γ de centre O, d'extrémités A et A' qui ne contient pas H privés des points A et A', où A' et H sont les points d'affixes respectives $-\sqrt{3}i$ et $\sqrt{3}$.

Et par suite N décrit $t_{\overrightarrow{OB'}}(\Gamma)$.



Fin