

EXERCICE N: 1 (6 points)

A) Déterminer la seule réponse correcte de chacune des propositions suivantes :

1) Soit n un entier naturel non nul . Le PGCD (n + 1 , n) est égal à

- a) 1** **b) n** **c) n + 1**

2) Le PPCM (- 984 , 702) est égal à

- a) 230256** **b) 115128** **c) - 115128**

3) Soit m un entier . Si $m \equiv 9 [10]$ alors :

- a) $m^{2011} \equiv 1 [10]$** **b) $m^{2011} \equiv 9 [10]$** **c) $m^{2011} \equiv 0 [10]$**

B) Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse .

1) Pour tout entier naturel n , $2^{2n} - 1$ est divisible par 3 .

2) Soit a un entier naturel non nul . Si $a^3 \equiv 1 [7]$ alors $a \equiv 1 [7]$.

3) Soit m un entier . $m \equiv 0 [20]$, si et seulement si , $m \equiv 0 [4]$ et $m \equiv 0 [5]$.

4) Soit n un entier . $n \equiv 0 [20]$, si et seulement si , $n \equiv 0 [2]$ et $n \equiv 0 [10]$.

5) L'équation (E) : $10x + 5y = 6$ n'admet pas de solution dans \mathbb{Z}^2 .

6) (E') : $12x - 5y = 3$ admet pour ensemble de solutions dans \mathbb{Z}^2 : $\{(4 + 10k ; 9 + 24k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$.

EXERCICE N: 2 (5 points)

La courbe (Cf) , ci-contre , est la représentation graphique

dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f

définie sur $[0; +\infty[$. (Cf) admet aux points

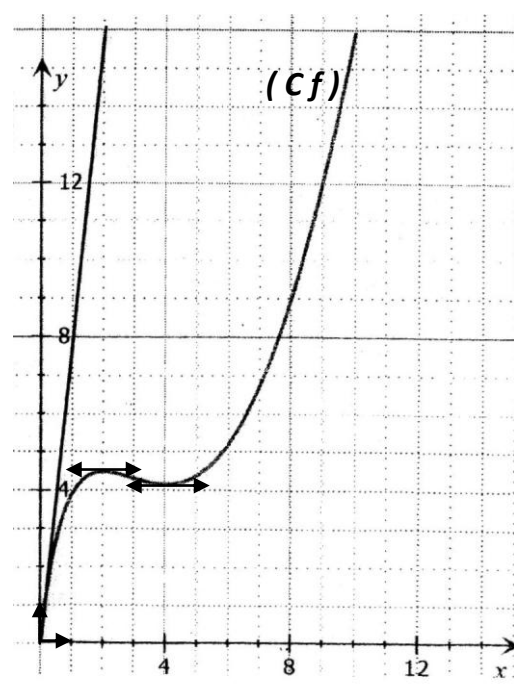
d'abscisses 2 et 4 des tangentes horizontales .

La tangente (T) à (Cf) au point O passe par le point A (1 , 8) .

1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Donner les valeurs de $f'(2)$, $f'(4)$ et $f'(0)$.

c) Donner une équation cartésienne de la droite (T) .



2) On suppose que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+1}$.

En utilisant les résultats de la question 1) b) Déterminer les valeurs de a , b et c .

3) On prend pour la suite : $a = 1$, $b = -6$ et $c = 8$.

a) Vérifier que pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = x - 7 + \frac{15}{x+1}$.

b) Déduire alors l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

EXERCICE N: 3 (9 points)

A) On considère la fonction f définie sur $I =]-2, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$.

On note (Cf) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2 cm)

1) Vérifier que pour tout $x \in I$; $f'(x) = \frac{x+4}{(x+2)^2}$.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que f admet une réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

B) On considère la fonction g définie sur I par : $g(x) = f(x) - x$.

1) a) Etudier les variations de g .

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans I exactement deux solutions -1 et α .

c) Vérifier que $\alpha \in]1.8, 2[$.

2) Donner, alors, la position relative de (Cf) et la droite Δ d'équation : $y = x$.

3) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cf) au point A d'abscisse 0 .

4) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; interpréter graphiquement ce résultat.

b) Tracer (T) , Δ , (Cf) et (Cf^{-1}) dans le repère R . (On prend : $\alpha = 1.9$)

C) Soit la fonction F définie par : $F(x) = x \ln(x+2)$.

1) Montrer que F est une primitive de f sur I .

2) Montrer que $F(\alpha) = \frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha+2}$