

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L' EDUCATION ET DE LA FORMATION ❄❄❄❄ <b>DEVOIR DE SYNTHESE N : 1</b>		LYCEE SECONDAIRE <b>AJIM JERBA</b> ⊕⊕⊕ B BRAHIM KHALED
EPREUVE : MATHEMATIQUES	COEFFICIENT : 4	NIVEAU ET SECTION : 3 <sup>e</sup> M
Premier trimestre	Date : 07 décembre 2009	Durée : 2 heures

**EXERCICE 1** (04 points)

Soit  $a, b, p$  et  $q$  quatre réels tels que  $p = a + b$  et  $q = a - b$ .

- 1) L'objet de cette question est de factoriser l'expression  $\cos(p) + \cos(q)$ .  
 On supposera connus le résultat suivant :  $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ 
  - a. Vérifier que  $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b)$ .
  - b. Exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $p$  et  $q$ .
  - c. Factoriser alors l'expression  $\cos(p) + \cos(q)$ .
- 2) Application de la formule :  
 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$ .

**EXERCICE 2** (05 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ .

- 1) Questions de cours  
 Un point  $M$  a pour coordonnées cartésiennes  $(x; y)$  dans le repère  $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$  et pour coordonnées polaires  $[r, \theta]$  dans le repère  $(O, \vec{OI})$ .
  - a. Calculer  $\cos(\vec{OI}; \vec{OM})$  et  $\sin(\vec{OI}; \vec{OM})$ .
  - b. Démontrer que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $x = r \cos(\theta)$ ;  $y = r \sin(\theta)$ .
- 2) On considère l'ensemble  $E$  des points  $M$  du plan dont les coordonnées polaires  $[r, \theta]$  vérifient  $r = 2 \sin(\theta)$  avec  $\theta \in ]0; \pi[$ .
  - a. Montrer qu'un point  $M$  de  $E$  a pour coordonnées cartésiennes  $(\sin 2\theta; 1 - \cos 2\theta)$ .
  - b. En déduire que  $E$  est contenu dans un cercle que l'on caractérisera.
- 3) On note  $(C)$  le cercle de centre  $I(0;1)$  et de rayon 1.  
 $N$  est un point de  $(C)$ , distinct de  $O$ , de coordonnées cartésiennes  $(x; y)$  et de coordonnées polaires  $[r, \theta]$ .
  - a. Justifier que l'on peut choisir  $\theta \in ]0; \pi[$ .
  - b. Démontrer que  $r(r - 2 \sin(\theta)) = 0$ .
  - c. En déduire que  $N$  est un point de  $E$ .
- 4) Déterminer l'ensemble  $E$ .

**EXERCICE 3** (04 points)

Soit  $m$  un paramètre réel.

On considère la fonction  $f_m$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_m(x) = mx^2 - 2x + 1$ .

On désigne par  $(C_m)$  la courbe représentative de  $f_m$  dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

- 1) Etudier, suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le sens de variation de la fonction  $f$ .
- 2) Dans la suite on prend  $m \neq 0$ .
  - a. Vérifier que le point  $S_m \left( \frac{1}{m}; 1 - \frac{1}{m} \right)$  est le sommet de la courbe  $(C_m)$ .
  - b. En déduire que quand  $m$  varie dans  $\mathbb{R}^*$ ,  $S_m$  décrit la droite  $D$  d'équation  $x + y - 1 = 0$ .
- 3) a. Montrer que  $(C_m)$  passe par un seul point fixe  $A$  dont on précisera les coordonnées.  
 b. Prouver que pour tout réel non nul  $m$ ,  $(C_m)$  coupe  $D$  en deux points  $A$  et  $S_m$ .

**EXERCICE 4** (07 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			-3		
$f(x)$	↗ -2 ↘		-1 ↘	-3 ↗	

On admet que :

$$\oplus \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0.$$

$$\oplus f(x) < x \text{ pour tout réel } x \text{ de } ]-\infty; 0[.$$

$\oplus$  La courbe représentative de  $f$  possède une asymptote à gauche au point d'abscisse 0.

$$\oplus \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

**Partie A**

- 1) Recopier et compléter le tableau de variations de  $f$ .
- 2) Préciser les extremums locaux de  $f$ .
- 3) a. Interpréter graphiquement les résultats obtenus dans ce tableau.  
b. Tracer une courbe possible représentant  $f$ .
- 4) a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .  
b. Préciser le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$ .

**Partie B**

On suppose qu'il existe cinq réels  $a, b, c, d, e$  tels que pour tout réel  $x$ , on a :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + b}{x} & \text{si } x < 0 \\ cx^3 + dx + e & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Expliciter la fonction dérivée de  $f$ .
2. A l'aide du tableau de variation de  $f$  déterminer les réels  $a, b, c, d, e$ .

Bon travail  
et   
bonne chance