Lycées Houmet Souk 1 & 2 Profs : Loukil . M & Zayoud . A	Devoir de Contrôle N : 1 Durée : 2 Heures	4 Mathématique 12 Novembre 2011

EXERCICE N : 1 (3 points)

Indiquer la bonne réponse pour chacune des questions suivantes. Aucune justification n'est demandée

I) $\lim_{x \to +\infty} \tan\left(\frac{\pi x}{2x-1}\right)$ est égale :

a) $+\infty$ **b)** 0 **c)** $-\infty$

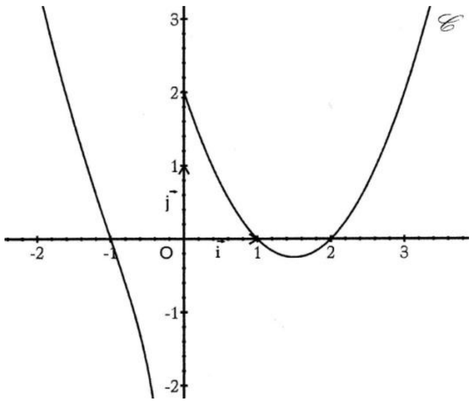
II) Soit g une fonction tel que pour tout $x \in]-\infty ; 0[$: $\frac{x^2-1}{x^2} \leq g(x) - x \leq \frac{x^2+1}{x^2}$

et (Cg) sa courbe dans un repère orthonormé , alors :

a) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ **c)** $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à (Cg)

III) Le graphique ci-contre est la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur IR* et telle que :

- L'axe des ordonnées est une asymptote à $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{C}$ admet deux branches paraboliques de direction $(O ; \vec{j})$.



1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ égal à :

a) 0 **b)** $-\infty$ **c)** $+\infty$

2) Le domaine de définition de $f \circ f$ est :

a) IR* **b)** IR \ { -1 , 1 , 2 } **c)** IR* \ { -1 , 1 , 2 }

3) Le nombre de solution(s) de l'équation $f \circ f(x) = x$ dans $]0 ; 1[$ est :

a) 0 **b)** 1 **c)** 2

EXERCICE N : 2 (5.5 points)

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite U est croissante .

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$ et que $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n}}{U_n}$

EXERCICE N : 3 (6 points)

Soit **m un nombre complexe non nul** et soit **(E)** l'équation : $z^2 + imz - (1+i)m^2 = 0$

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** .

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , M et M'' d'affixes respectives : 1 , m et $(-1-i)m$.

Soit M' le point du plan tel que : $\begin{cases} OM' = \sqrt{2}\,OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$

1) a) Déterminer en fonction de m , l'affixe m' de M' .

b) Vérifier que M' et M'' sont symétrique par rapport à O.

2) Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle en M .

3) Déterminer et construire l'ensemble **(E)** des points M tels que $m' \in]-\infty\,;0[$.

4) On pose : $m = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Ecrire $m' - 1$ sous forme exponentielle.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle OAM' est un triangle équilatéral .

EXERCICE N : 4 (5.5 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un carré direct OABC de centre Ω .

On note I , J et K les milieux respectives de [OA] , [OC] et [AB] .

1) Soit $f = S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}$. Caractériser f .

2) Soit g une isométrie sans points fixes qui transforme O en C et I en J .

a) Montrer que g est une symétrie glissante .

b) Montrer que g (A) = O .

c) En déduire les éléments caractéristiques de g .

3) a) Vérifier que $g = t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}$.

b) Soit D = g (K) . Montrer que O est le milieu de [ID] .

4) Soit $\varphi = g^{-1} \circ f$.

a) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(I)$ puis caractériser φ .

b) Trouver alors l'ensemble Δ des points M du plan tels que f (M) = g (M) .