EXERCICE N°1

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ et la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^2+3x-1$. On appelle C_f et C_g leurs représentations graphiques. Soit D la droite d'équation $y=2x-3$.

Etude de *f*

1. a. Etudier les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Etudier les limites de *f* en -1
c. Quelles sont les asymptotes de C_f et C_g ?
2. Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) de C_f où la tangente est parallèle à D.
4. Dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées), tracer sur l'intervalle $[-6\ ;\ 4]$ la courbe C_f ainsi que ses asymptotes.

Etude de *g*

1. Etudier les limites de *g* en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Etudier les variations de *g* sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer l'équation de la tangente à C_g parallèle à la droite D.

Intersection

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g.
2. Etudier suivant les valeurs de *x*, la position de C_f par rapport à C_g.

EXERCICE N°2

Soit $f(x)=\frac{4x^2-8x+7}{1-2x}$.

a. Déterminer son ensemble de définition, montrer que le point $\Omega(\frac{1}{2},2)$ est centre de symétrie de la courbe (C) de *f*.
b. Déterminer suivant les valeurs de *x* la position de (C) par rapport à la droite (D) $y=2x+3$
c. Tracer dans un repère orthonormé la droite (D) et la courbe (C). (on placera particulièrement les points A et B de (C) d'abscisses respectives -1/2 et 3/2)
d. Déterminer graphiquement puis algébriquement le signe de *f*.

EXERCICE N°3

Soit $f(x)=\frac{(1-x)^3}{x^2}$. C sa courbe représentative

a. Trouver *a*, *b*, *c*, *d* tels que $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2}$ pour tout *x* réel non nul.
b. Etudier les variations de *f* : dérivée, signe de la dérivée, limites, tableau.
c. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
d. Peut-on trouver un point de C où la tangente à C soit parallèle à la droite Δ ($y=-x$) ? Si oui, préciser l'équation de cette tangente T'.
e. Montrer que C a une asymptote oblique D. préciser leurs positions respectives, tracer T' si elle existe, T, D et C.

f. Justifier l'existence d'une solution unique de l'équation *f(x)* = 1. En donner une valeur approchée à 0,01 près.

EXERCICE N°4

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4(2x+1)}{x^2+2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé : unité graphique : 1 cm.

1. a. Calculer $f'(x)$.

b. Etudier les variations de *f* et dresser le tableau de variation de *f*.

2. Tracer C.

3. Soit D la droite d'équation $y=\dfrac{9}{4}x-7$ et T la tangente à C au point *A* d'abscisse 4.

a. Déterminer l'équation de T.

b. Montrer que le point *A* appartient à C et D.

c. Montrer alors que D et T sont perpendiculaires.

d. Tracer dans le repère précédent D et T.

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie par f(x)=$\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}$

1. Déterminer les réels a et b pour que la courbe (C) de f admet le point A(-1,3/4) pour extremum
2. Montrer que la droite d'équation x=-1 est un axe de symétrie de (C)
3. Etudier les variations de f
4. Etudier les positions relatives de (C) et son asymptote horizontale
5. Tracer (C) dans un repère orthonormé
6. Soit (E_m) : $(m-1)x^2+2(m-1)x-3m+2=0$ .Utiliser (C) pour déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation (E_m)

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie par f(x)=$\dfrac{x^2+3x+1}{x(x+1)}$

1. Déterminer les reéls a, b et c pour que pour tout x different de 0 et -1 on a :
   f(x)=$a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+1}$
2. Montrer que le point I(-1/2,1) est un centre de symétrie de (C_f)
3. Etudier les variations de f
4. Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point I et étudier les positions relatives de (C_f) et (T)
5. Montrer que I est un point d'inflexion de (C_f)
6. Résoudre l'équation f(x) =0 et en utilisant le tableau de variation de f déterminer le signe de f(x)
7. Tracer(C_f) et (T)

8. Soit g(x)=$\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ Montrer que $\left(C_g\right)$ est l'image de $\left(C_f\right)$ par une transformation simple que l'on précisera .Déterminer les coordonnées du centre de symétrie I' de $\left(C_g\right)$ Puis l'équation de la tangente (T') en I' à $\left(C_g\right)$. Tracer (T') et $\left(C_g\right)$

EXERCICE N°7

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x\sqrt{1-x}$.
1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
b. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et que $f'(x)=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x<1$.
d. Dresser le tableau de variation de f.
e. Représenter graphiquement la fonction f.
2. a. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ admet une seule solution x_1 dans $]-\infty\,;0]$ et que $-\dfrac{1}{3}<x_1<0$.
b. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet exactement deux solutions x_2 et x_3 dans $[0\,;1]$ et que $0<x_2<\dfrac{2}{3}<x_3<1$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de x_1.
3. a. On pose $u=\dfrac{3}{2}(x-\dfrac{1}{3})$. Montrer que l'équation (E) : $\left|x\sqrt{1-x}\right|=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ est équivalente à (E') :

$$8u^3-6u-1=0\,.$$

b. Pour i = 1, 2, 3, on pose $u_i=\dfrac{3}{2}(x_i-\dfrac{1}{3})$. Montrer qu'il existe un unique réel θ_i de [0 ; π] tel que $u_i=\cos\theta_i$.
c. Prouver que $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ pour tout θ réel.
d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}$. Résoudre cette équation dans [0 ; π] et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.