LYCÉE H.PACHA

DEVOIR DE CONTRÔLE # 1.

ANNÉE SCOLAIRE 2011—2012

Pr : Ben fredj sofiane

Le devoir dure 2 heures. Les calculatrices sont autorisées, mais : l'échange de tout matériel est interdit
Les brouillons ne sont pas acceptés dans les copies. Une copie non soignée sera sanctionnée.

EXERCICE 1 (5 POINTS). Répondre par vrai ou faux, en justifiant la réponse.

1—• Le quotient du nombre 2721 par -347 est -7.

2—• Si p est un entier premier tel que $p > 2$ alors 12 divise $p^3 - p$.

3—• Les deux suites (a_n) et (b_n) définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = -\frac{1}{n} \text{ et } b_n = 1 + \frac{1}{n}$$

4—• (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (u_n)^2$.
Si (v_n) converge alors (u_n) est convergente.

EXERCICE 2 (5 POINTS). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1—• a—• Montrer que (H_n) est croissante.

b—• Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\quad H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

c—• Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

d—• Montrer que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

2—• Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \frac{1}{2k} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

3—• Déduire que pour tout $n \geq 1$, $\quad H_n \leq 2\sqrt{n}$.

4—• Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{n}$.

EXERCICE 3. (5 POINTS)

1—● Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.
On donnera les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2—● On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(\mathrm{E}): z^3 - (1+i)z^2 + (1+i)z - i = 0$$

a—● Montrer que i, $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de (E).

b—● Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, les équations :

$$(\mathrm{E}'): z^3 + (1+i)z^2 + (1+i)z + i = 0$$
$$(\mathrm{E}''): z^6 - (1+i)z^4 + (1+i)z^2 - i = 0$$

On donnera les solutions de (E′) et (E″) sous forme exponentielle.

EXERCICE 4. (5 POINTS) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1—● a—● z, z' sont deux nombres complexes tels que $z \neq z'$.
Montrer que si z et z' ont le même module alors $\dfrac{z'+z}{z'-z}$ est imaginaire pur.

b—● z, z' et z'' sont les affixes respectives des points M, M' et M'' et soit H le point d'affixe $z_H = z + z' + z''$.
On suppose que z, z' et z'' sont deux à deux distincts tels que $|z| = |z'| = |z''|$.
Montrer que H est l'orthocentre du triangle $MM'M''$.

2—● Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 2e^{i\alpha}\ , \quad b = 2e^{2i\alpha} \text{ et } c = 2e^{3i\alpha},$$

et soit K le point d'affixe $z_K = a + b + c$ où α étant un réel de l'intervalle $]0, \pi[$

a—● Montrer que K est l'orthocentre du triangle ABC.

b—● Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = 2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

c—● Déterminer la valeur de α dans $]0, \pi[$ pour que K soit le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

d—● Placer soigneusement A, B et C pour la valeur α trouvée.