DEVOIR DE CONTROLE N° 1

Mathématiques

Classe : 4 ème Info

Date : 07 / 12 / 2011 | Prof : MEDDEB Tarak | Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4}-3 & si \ x\le 0\\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-1 & si \ x>0\end{cases}$

1) En remarquant que : pour $x>0$, $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x>0$, on a : $-x-1\le f(x)\le x-1$.

   En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

   $b/$ La fonction f est-elle une continue en 0 ?

3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2^+} f\left(\frac{1}{x-2}\right),\ \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x+1}{\pi x-2}\right) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)$$

Exercice n°2 : (4 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=x^3-3x+3$.

On admet que les variations de f sur l'intervalle $[-3\,,2]$ sont données par le tableau suivant :

x	-3		-1		1		2
$f(x)$	-15	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	5

1) Déterminer, en utilisant le tableau :

   $a/$ $f([-3\,,1])$, $f([-1\,,2[)$.

   $b/$ Le nombre de solutions de chacune des équations : $f(x)=3$, $f(x)=0$.

2) On note α la solution de l'équation :$f(x)=0$. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5.

Exercice n°3 : (5 pts)

1) Soit n un entier naturel. Démontrer l'équivalence :

   (n n'est pas multiple de 5) si et seulement si ($n^4 - 1$ est multiple de 5).

2) Soient a et b deux entiers naturels.

   Traduire en terme de congruence la propriété : « a et b ont le même chiffre des unités ».

3) Soient $n \in IN$ et $p \in IN^*$.

   $a/$ Démontrer que : $n^{p+4} - n^p$ est pair.

   $b/$ Démontrer que : $n^{p+4} - n^p$ est divisible par 5.

   $c/$ En déduire que n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités.

Exercice n°4 : (6 pts)

1) Soit f la fonction définie sur $[1\,,2]$ par : $f(x) = \dfrac{4x-2}{x+1}$.

   Montrer que f est croissante sur $[1\,,2]$ et déterminer $f\left([1\,,\,2]\right)$.

2) On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = f\left(U_n\right) \;\; pour\;\; tout\;\; n \in IN \end{cases}$.

   $a/$ Montrer que, $1 \leq U_n \leq 2$ pout tout $n \in IN$.

   $b/$ Montrer que la suite U est croissante.

   $c/$ En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

3) On pose, pour tout $n \in IN$, $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 1}$.

   $a/$ Montrer que V est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

   $b/$ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   $c/$ Retrouver la limite de la suite U.

Bonne chance