

EXERCICE I (ARITHMETIQUE)

1.a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n .

b) Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$.

2.a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1(9)$.

b) On désigne par N un entier naturel écrit en base 10, on appelle S la somme de ses chiffres.

Démontrer la relation suivante: $N \equiv S(9)$

c) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = 2005^{2005}$; on désigne par:

=> B la somme des chiffres de A .

=> C la somme des chiffres de B .

=> D la somme des chiffres de C .

a) Démontrer la relation suivante: $A \equiv D(9)$.

b) Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$.

c) Démontrer que $C < 45$.

d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e) Démontrer que $D=7$.

EXERCICE II(SUITE -INTEGRALE)

On pose pour tout entier naturel non nul n ,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$$

1. a. Calculer I_1 .

=

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

c. En déduire I_3, I_5 et I_7 .

2. a. Prouver que pour tout entier naturel non nul n et pour

$$t \in [0;1], \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq \frac{t^{n-1}}{2}$$

b. En déduire un encadrement de I_n .

c. Déterminer les limites des suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3. a. Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3 .

b. **Démontrer par récurrence que** $u_n + 2(-1)^n I_{2n+1} = \ln 2$

EXERCICE III (SIMILITUDE)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

On considère les points A et B d'affixe $z_A=2$ et $z_B=3/2+i$

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct.

On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N.


On considère la transformation $r=s_2 \circ s_1$

Le but de l'ex est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1) **A l'aide des transformations.**

a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2 .

b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.

- 
- c. Justifier que r est une rotation d'angle $\pi/2$ et préciser son centre.
d. Quelle est l'image du point O par r ?
e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2) **En utilisant les nombres complexes.**

- a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2 . On utilisera les résultats de la question 1)a.
b. En déduire les affixes z_M et z_N des point M et N .
c. Donner sans justification l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.