

Exercice n°1 (4 pts)

Pour chaque question ; trois affirmations sont proposées ; une et une seule est exacte l'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie .Aucune justification n'est demandée.

I) Soit n un entier naturel non nul et $A = 3^{4n} - 1$. Le reste de la division euclidienne de A par 5 est :

- a) 0 b) 1 c) 2.

II) L'équation : $186x + 20y = 3$ possède dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

- a) Zéro solution b) Une solution c) Une infinité de solutions

III) On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

X	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	-1	0	2	1

Note: The table shows a path starting at (0, -1) going down-right to (1, -1), then up-right to (0, 0), then up-right to (1, 2), and finally down-right to (2, 1).

1) La droite D est une asymptote à la courbe représentative de f avec :

- a) $D : x = 0$ b) $D : x = 1$ c) $D : y = 1$

2) Le réel $f(-2)$ est

- a) Strictement positif b) Strictement négatif c) nul .

Exercice n°2 (5,5 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \end{cases} .$$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n < 2$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 2)^2}{4 - U_n}$.

c) En déduire que la suite (U_n) est croissante sur \mathbb{N} .

d) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite l .

2) On considère la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$.

a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = \frac{-1}{2}$; préciser son premier terme V_0

b) Exprimer V_n en fonction n puis U_n en fonction n .

c) Retrouver la limite l de la suite (U_n) .

..... voir suite au verso →

Exercice n°3 (4,5 pts)

On considère l'équation (E) : $5x - 4y = 1$ où x et y sont deux inconnues entières .

1) a) Vérifier que $(1 ; 1)$ est une solution particulière de (E).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) On donne les suites (U_n) et (V_n) qui sont définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = V_n + 4 \end{cases} .$$

a) Justifier que (U_n) et (V_n) sont arithmétiques et préciser leurs raisons .

b) Exprimer U_n et V_n en fonction de n .

c) En déduire qu'on a : $U_p = V_q$ si et seulement si $5p - 4q = 1$.

d) Déterminer tous les couples $(p ; q)$ avec p et q entiers naturels inférieurs à 15 tels que $U_p = V_q$.

Exercice n°4 (6 pts)

1) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x + \sin(x)$.

a) Montrer que pour tout réel x on a : $x - 1 \leq g(x) \leq x + 1$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^4 - x^3 + 2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Montrer que f est continue en zéro . (on donne : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$) .

b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x}$.

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat .

3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f \circ g(x)$.

Bon travail