

Exercice N1 (3 points)

Indiquer la seule réponse exacte aucune justification n'est demandée

1°) Z est un nombre complexe alors $|Z + i| =$

- (a) $|Z| + 1$ (b) $|iZ - 1|$ (c) $|Z - i|$

2°) Si la suite $(|u_n|)$ converge vers 1 alors la suite (u_n) est :

- (a) majoré (b) converge vers 1 (c) converge vers 1 ou -1

3°) (u_n) une suite réelle définie par $u_n = \begin{cases} \left(\frac{-2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ alors

- (a) la suite (u_n) n'est pas convergente (b) on ne peut rien dire (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice N2 (4 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = 1 - i$ et $Z_B = 2 + \sqrt{3} + i$

1°) Déterminer le module et un argument de Z_A .

2°) a/ Montrer que $\frac{Z_B}{Z_A} = (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$

b/ Déduire la forme exponentielle de $\frac{Z_B}{Z_A}$

3°) a/ En déduire que $Z_B = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) e^{i\pi/12}$

b/ Donner alors une construction du point B

Exercice N3 (6.5 points)

Dans Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{v})$. On considère les points A, B et D d'affixes respectivement $Z_A = -i$, $Z_B = 3i$ et $Z_D = -2 + i$

I/ 1°) Placer les points A, B et D dans le repère $(O, \overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{v})$

2°) a / Ecrire $\frac{Z_D - Z_A}{Z_D - Z_B}$ sous forme algébrique

b/ Déduire que ABD est un triangle rectangle isocèle en D

c / Déterminer l'affixe du point C tel que ACBD soit un carré

II/ À tout point M distinct de B d'affixe Z on associe le point M' d'affixe Z' définie par

$$Z' = \frac{iZ - 1}{Z - 3i}$$

1°) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tel que Z' est imaginaire

2°) a/ Montrer que $|z'| = \frac{MA}{MB}$

b/ En déduire que si M appartient à la médiatrice de segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle que l'on déterminera

3°) Soit I le milieu de segment [AB] d'affixe z_I

a/ Vérifier que $z' - z_I = \frac{-4}{z - z_B}$

b/ En déduire que $(\vec{u}, \vec{IM}') \equiv \pi - (\vec{u}, \vec{BM}) [2\pi]$

c/ Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la demi droite [B, v) privé de B

Exercice N 4 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} + x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sin \frac{x}{2} (\sqrt{x+4} + 2)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1°) a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b/ Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\frac{-1}{\sqrt{x+4}-2} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x+4}-2}$.

c/ En déduire: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2°) a/ Montrer que f est continue en 0

b/ Etudier la continuité de f sur \mathbb{R}

3°) On suppose que la restriction de f sur $] -\infty, 0]$ est strictement croissante

Montrer que $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[-2, -1]$

4°) La courbe ci-contre est la représentation graphique

d'une fonction h continue sur \mathbb{R}

a/ Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h \circ f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ h(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} h \circ f(x)$$

b/ Etudier la continuité de $h \circ f$ sur \mathbb{R}

