

### Exercice 1 (3.75pts)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions suivantes

- Une réponse correcte justifier vaut **0.75pt**
- Une réponse correcte sans justification vaut **0.5pt**
- Une réponse incorrecte ou l'absence de réponse vaut **0pt**

- 1) L'ensemble des points M d'affixe z tel que :  $z = 4 + e^{i\alpha}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ , est un cercle
- 2) Soit z un nombre complexe et  $d = z + 2i$ , on a :  $|d| = |z| + 2$
- 3) La fonction f définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 est continue sur  $\mathbb{R}$
- 4) Soient  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation :  $mz^2 + 2m^2z - 1 = 0$  ou m est un nombre complexe de module 2  
On a alors :  $|z_1 + z_2| = 4$
- 5) Le nombre complexe  $u = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$  est une racine sixième de  $8e^{i\frac{\pi}{6}}$

### Exercice 2 (5pts)

On considère la suite réelle  $(U_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 5 - \sqrt{U_n^2 + 9} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a :  $0 \leq U_n \leq 4$   
b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante  
c) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et calculer sa limite
- 2) Soit  $V_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k=n} U_k$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$
- 3) On considère la suite réelle  $(W_n)$  définie par :  $W_n = 2 \sum_{k=0}^{k=n} U_{k+1} + n^2 V_n$ 
  - a) Montrer que pour tout entier naturel k tel que :  $0 \leq k \leq n$ , on a :  $U_{k+1} \geq \frac{3 - U_k}{2}$   
(On pourra remarquer que la suite  $(U_n)$  est croissante)
  - b) Déduire que  $W_n \geq 3n + 3$  ; puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$

### Exercice 3 (5pts)

- 1) le plan complexe  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soient A et B les points d'affixes respectives  $i$  et  $(-i)$ . et  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre O et de rayon 1  
Soit F l'application qui à tout point M d'affixe z non nul associe les points M' d'affixe respective

$$z' = \frac{z^2 + 1}{z} ; \text{ On désigne par } M'' \text{ le symétrique de } M \text{ par rapport à } (O, \vec{u})$$

- 1) a) Déterminer F(A) et F(B)  
b) Montrer que si z est un imaginaire pur alors z' est un imaginaire pur

- c) En déduire l'image de la droite (AB) par F
- 2) a) Montrer que si  $z = e^{i\alpha}$  ;  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors  $z' = 2\cos\alpha$   
 En déduire que si M est un point de cercle ( $\mathcal{C}$ ) alors M' décrit un segment qu'on précisera
- b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $z' = 2\cos\alpha$  (on donnera l'écriture exponentielle des solutions trouvées)
- 3) a) Vérifier que pour tout nombre complexe z non nul on a :  $z' - z = \frac{1}{z}$
- b) En déduire que  $MM' = \frac{1}{OM}$  et que  $\overline{MM'}$  et  $\overline{OM'}$  sont deux vecteurs colinéaires de même sens
- c) Montre alors que si M est un point du cercle ( $\mathcal{C}$ ) alors OMM'M'' est un losange

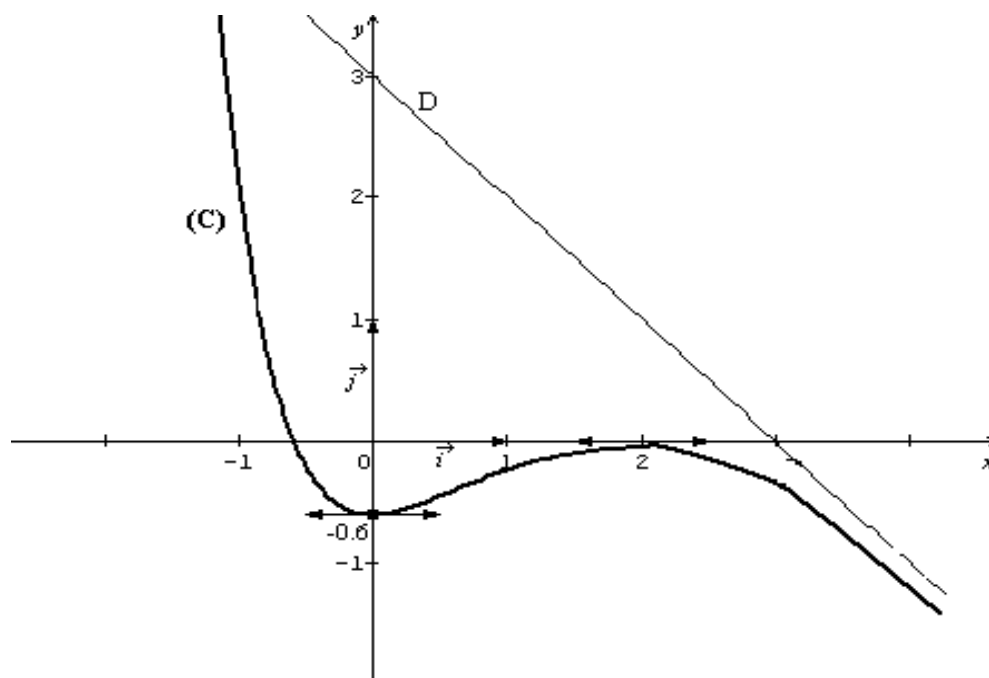
#### Exercice 4 (6,25pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On a représentée ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On sait que la courbe (C) admet :

- Une asymptote D d'équation :  $y = 3 - x$  au voisinage de  $+\infty$
- Une branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$  au voisinage de  $-\infty$

- 1) En utilisant le graphique
- a) Déterminer :  $f(0)$  ;  $f(-1)$  et  $f([2, +\infty[)$
- b) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 3)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f \circ f(x)}{f(x)}$
- c) Dresser le tableau de variation de f
- 2) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -1, 0 [$
- 3) Soient les fonctions :  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  et  $h(x) = g \circ f(x)$
- a) Déterminer le domaine de définition de la fonction h
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x)$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.



BON TRAVAIL