

DEVOIR DE CONTRÔLE N 1 - ANNEE SCOLAIRE : 2011-12

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 2h

COEFFICIENT : 3

PROFESSEUR : HATEM EDDHAOUI

“Il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie”

Exercice 1 (3 points)

Répondre par **vrai** ou **faux** en justifiant la réponse :

- 1) Lorsque θ varie dans $[0, \pi]$, le point M d'affixe $i + 2e^{i\theta}$ varie sur un cercle.
- 2) La suite U définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, n'a pas de limite.
- 3) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, et si, pour tout $x \leq 2$, $g(x) = 4x - \sqrt{2-x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{gof}(x) = +\infty$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i , $-3i$ et $-i$.

Pour tout point M du plan d'affixe z ($z \neq -3i$), on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{iz - 1}{z + 3i}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
- 2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
- 3) a) Vérifier que $(z' - i)(z + 3i) = 2$.
b) En déduire que $AM' \cdot BM = 2$ et que $(\vec{u}, \widehat{AM'}) + (\vec{u}, \widehat{BM}) \equiv 0[2\pi]$.

4) Soit le point E d'affixe $z_E = -3i - 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

- a) Calculer BE.
- b) Déterminer (\vec{u}, \widehat{BE}) .

Exercice 3 (6 points)

A/ Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ 4x^3 + 6x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos(\pi x)}{x} - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $-1 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} - 1$.

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0 .

B/ Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 4$.

1) Déterminer le domaine de continuité de g .

2) Soit h la restriction de g à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

b) Déterminer h ($[1, +\infty[$).

3) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[4, 5]$.

Exercice 3 (6 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geq 3$.

b) Montrer que (U_n) est croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite ℓ .

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(U_n - 3)$.

b) En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) Retrouver alors la limite ℓ de (U_n) .