Lycée Secondaire Grombalia Prof: Anis Ben Rejeb **Mathématiques**	**Devoir de contrôle N°1**	Classe : $4^{ème}$ $sc.exp_3$ Durée : 2H Date : 12/11/ 2010

Exercice n°1: (4 points) :

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte. Ecrire le numéro de la question et donner, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie.

I. On donne le nombre complexe $z=-5\left(\frac{\sqrt{3}+i}{i}\right)$

1) Le module de z est égal à :

a) $5\left|\sqrt{3}+i\right|$; b) $-5\left|\frac{\sqrt{3}+i}{i}\right|$; c) $5\left(\left|\sqrt{3}+i\right|-|i|\right)$

2) Un argument de Z est égal à :

a) $-5\frac{\arg(\sqrt{3}+i)}{\arg(i)}$; b) $\frac{\pi}{2}+\arg\left(\sqrt{3}+i\right)$; c) $\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{i}\right)$

3) Z est égal à :

a) $10e^{i\frac{2\pi}{3}}$; b) $-10e^{i\frac{\pi}{6}}$; c) $5e^{i\frac{\pi}{3}}$

II. On considère trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) qui vérifient la propriété suivante :

$\ll$ Pour tout entier naturel n strictement positif : $u_n \le v_n \le w_n$ $\gg$

1) Si (u_n) et (w_n) sont adjacentes alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$. ; b) la suite (v_n) est majorée. ; c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.

2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors :

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$. ; b) la suite (u_n) est minorée. ; c) la suite (w_n) n'a pas de limite.

Exercice n°2: (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, -3i et –i.

Pour tout point M du plan d'affixe z $(z\neq-3i)$ on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\frac{iz-1}{z+3i}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$.
3) a) Vérifier que $(z'-i)(z+3i)=2$.

   b) En déduire que $AM'.BM=2$ et que $(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+(\vec{u},\overrightarrow{BM})\equiv 0[2\pi]$.

4) Soit le point E d'affixe $z_E=-3i-2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   a) Calculer BE.

   b) Déterminer $(\vec{u},\overrightarrow{BE})$.

   c) Placer le point E et en déduire une construction du point E' d'affixe z'_E.

Exercice n°3: (5,5 points)

Soit f a fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-1} & \text{si } x<-1 \\ 4x^3+6x^2\text{-}1 & \text{si } -1\leq x\leq 0 \\ \dfrac{1-\cos\pi x}{x}\text{-}1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Montrer que pour tout $x>0$ on a : $-1\leq f(x)\leq \dfrac{2}{x}-1$.

   c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1,0]$.

   a) Dresser le tableau de variation de g sur $[-1,0]$.

   b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique $\alpha\in]-1,0[$.

   c) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

   d) Donner le signe de g(x) sur $[-1,0]$.

Exercice n°4: (5.5 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=4 \\ U_{n+1}=\dfrac{4U_n-3}{U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $U_n\geq 3$.

   b) Montrer que (U_n) est décroissante.

   c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite ℓ .

2) a) Montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $U_{n+1}-3\leq\frac{1}{3}(U_n-3)$.

   b) En déduire par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $U_n-3\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   c) Retrouver alors la limite ℓ de (U_n).

Bon travail !