**EXERCICE 1**

**A-**Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle ]0 ; +∞[ par : g(x) = x – x ln x.

**1.** Déterminer les limites de la fonction g en o et +∞.

**2.** Montrer que g est dérivable sur l'intervalle ]0 ; +∞[ et que g'(x) = −ln x.

**3.** Dresser le tableau de variation de la fonction g.

**Partie B.**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout n ∈ IN*, par $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$.

**1.** Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :

**a.** le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**b.** la limite éventuelle de la suite $(u_n)$.

**2.** Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout n ∈ IN* par $v_n = \ln(u_n)$.

**a.** Montrer que $v_n = n – n \ln n$.

**b.** En utilisant la partie A, déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)$

**c.** En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**3.** Montrer que la suite $(u_n)$ est bornée.

**4.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**EXERCICE 2**

Répondre par vrai ou faux sans justification

1/ pour tout n ∈ IN n+1 et $n^2+2$ sont premiers entre eux

2/ pour tout n ∈ IN $2^n+3^n \equiv 5^n$ (mod6)

3/ on pose pour tout x ≥ 1 $F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{\ln t}}{t^2}\,dt$ et $G(x) = \int_0^{\ln x} e^{-t}\sqrt{t}\,dt$

Alors F(x) = G(x) ∀ x ∈ [1,+∞[

4/ La fonction f définie sur IR par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est paire

Exercice 2 (5pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

**EXERCICE 3** On considère les points A(1,0,-1) ; B(1,3,5) ; C(-7,2,2) et H(-1,4,3)

1/a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{HC}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est x-2y-2z+15=0

c) Montrer que le point H est le projeté orthogonal de A sur (HBC)

2/ On considère l'ensemble S des points M(x,y,z) de l'espace tels que

$X^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera un centre I et un rayon
b) Vérifier que I est le milieu du segment [AH]
c) Déterminer la position relative de la sphère S et du plan (HBC)

3/ Soit J(0,0,1)

a) Vérifier que J appartient à S
b) Calculer la distance entre I et (AJ)
c) En déduire que (AJ) est tangente à S
d) Donner une représentation paramétrique de (AJ) et déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AJ) et du plan (HBC)

4/ Soit Q l'image du Plan (HBC) par translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et T l'image de S par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{3}{2}$

Déterminer T ∩ Q

**EXERCICE 3(BIS)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $Y_i$ | 4.26 | 3.4 | 2.01 | 1.16 | 1.01 |

1/a) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X,Y) et interpréter le résultat

b) Donner une équation de la droite de régression de Y en X

c) cette équation permet-t-elle d'estimer le degré de salinité du lac quand il y'aurais 6 mois pluvieux de l'année ?

2/ On pose Z = ln(Y – 1)

a) Donner le tableau correspondant à la série (X,Z) (les résultats seront arrondis au millième )
b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X,Z)
c) Donner une équation de la droite de régression de Z en X
d) Utiliser cette équation pour répondre à la question 1/c)

**EXERCICE 4**

ABC, un triangle équilatéral direct du plan orienté. Soit O le centre du cercle $\varphi$ circonscrit à ce triangle et H le milieu de [BC] et I= $S_B(A)$

1)Soit S la similitude directe qui envoie A en B et C en H.

a)Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S

b) Soit ω le centre de S .Montrer que ω∈ $\varphi$ et que les points ω, A et H sont alignés

Construire alors ω et le placer sur la figure

2)Soit r la rotation de centre A qui transforme C en B et h=Sor

a) Déterminer l'image de A par h

b)En déduire que h est une homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$

3) Soit g l'antidéplacement vérifiant g(B)=A et g(I)=B.

Prouver que g est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et L'axe

4) On pose ψ =hog

a)Montrer que ψ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport

b) Déterminer ψ (B) et ψ (D) où D =B*I .En déduire les éléments caractéristiques de ψ

## EXERCICE 5

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Si N=$3^{2011}$, alors le chiffre des unités de N est:

a) 3 b) 7 c) 9

2) Les solutions, dans Z×Z, de l'équation:$17x-10y=1$sont de la forme:

a)$(3+17k,5+10k)$ b) $(17k,10k)$ c) $(3+10k,5+17k)$

;$k\in$Z

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct$(o,\vec{u},\vec{v})$, Soit f une similitude

indirecte de rapport 2, de centre I d'affixe$1+i$ et d'axe (Δ): $y=x$ .Alors l'écriture

complexe de f est:

a) $z'=(1+i)\bar{z}-2$ b) $z'=2i\bar{z}-1-i$ c) $z'=2iz-1-i$

## *EXERCICE 6*

On considère, dans Z×Z, l'équation (E):$148x-97y=1$.

1) a) Vérifier que le couple (-19,-29) est une solution particulière de (E).

b) Résoudre, dans $Z\times Z$, l'équation (E) .

c) Déterminer l'inverse de 97 modulo 148.

2) a) Vérifier que 149 est premier.

b) Soit p un entier naturel non nul tel que $p\leq 148$ .Montrer que $p^{148}\equiv 1[149]$.

3) Soit $a\in\{2,3,4,........,148\}$, On pose $S(a)=1+a+a^2+.......+a^{147}$ .

a) Montrer que $a^{148}-(a-1)S(a)=1$.

b) En déduire que $a^{148}$ et (a-1) sont premiers entre eux.

c) Montrer que 149 divise S(a).

## EXERCICE 7

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A(3,1,0);B(-1,1,0);C(-1,2,-1) et I(1,0,-2).

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de P est: $y+z-1=0$.

c) Calculer le volume du tétraèdre IABC.

2) Soit (S) la sphère de centre I et passant par A.

a) Vérifier que B et C sont situés sur la sphère (S).

b) Soit (ξ) le cercle circonscrit au triangle ABC.

Déterminer le rayon r et les coordonnées du centre H de(ξ) .

3) Soit le plan Q: $y+z+2=0$

a) Montrer que Q est l'image de P par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

b) Vérifier que $I\in Q$ et donner le rayon du cercle (ξ') intersection de Q et (S).

## EXERCICE 8

On donne un triangle ABC tels que AB=2AC et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

(Recopiez la figure ci-dessus et la compléter)

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC); $I=S_{(AC)}(H)$ et $J=S_{(AB)}(H)$.

1) Caractériser l'application $S_{(AB)}oS_{(AC)}$ , En déduire que A=I*J.

2) Soit S la similitude directe telle que S(A)=B et S(C)= A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que H est le centre de S.

c) Montrer que S(I)=J.

3) On suppose que AC=1.On muni le plan d'un repère orthonormé direct$(A,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{j}=\overrightarrow{AC}$.

a) Déterminer les affixes des points A,B et C.

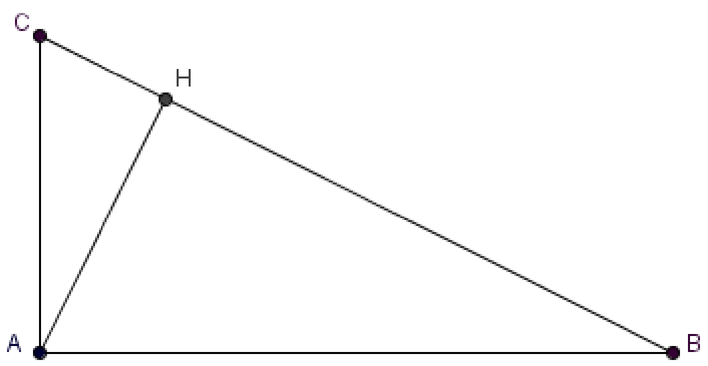
b) Donner la forme complexe de S et en déduire l'affixe de H.

4) Soit f la similitude indirecte tel que f(A)=B et f(C)=A.On désigne par Ω son centre.

a) Montrer que f=SoS$_{(AC)}$ .

b) Déterminer fof(C) et fof(I), et en déduire que Ω est le point d'intersection des droites (BC) et (IJ).

c) Déterminer et construire l'axe (Δ) de f.




## EXERCICE 9

Soit $f_n$ la fonction définie sur IR par $f_n(x) = \dfrac{2e^{nx}}{1 + e^x} - 1$, où n est un entier naturel,

et $(C_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité 2 cm.

**A-** Dans cette partie on prend n = 1

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x)$.

2) Calculer $f'_1(x)$ et dresser le tableau de variations de $f_1$ .

3) a- Démontrer que O est un point d'inflexion de $(C_1)$.

b- Ecrire une équation de la tangente (d) en O à $(C_1)$ .

4) Tracer (d) et $(C_1)$ .

**B-** Soit ($C_0$) la courbe représentative de la fonction $f_0$ , correspondant à n = 0 ,

dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Démontrer que la courbe ($C_0$) est symétrique de la courbe $(C_1)$ par rapport à l'axe des ordonnées .

2) Démontrer que ($C_0$) est symétrique de $(C_1)$ par rapport à l'axe des abscisses.

3) Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine limité par les courbes $(C_1)$, ($C_0$) et les droites d'équations x = 0 et x = 1 .

**C**- Soit la suite $(U_n)$ définie par $U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ .

1) Démontrer que $U_{n+1} + U_n = 2\dfrac{e^n - n - 1}{n}$ .

2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty}(U_{n+1} + U_n)$ et en déduire que la suite $(U_n)$ ne peut pas être convergente .

## EXERCICE 10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe 2 et B le point d'affixe 2i .

On désigne par E l'image de A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par F l'image de B par la transformation *T* définie par sa forme complexe $z' = (\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})\, z$.

1) a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de *T* .

b- Démontrer que les points A , B , E et F sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

2) a - Prouver que $\dfrac{z_E - z_A}{z_F - z_B}$ est un réel .

b- vérifier que $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_B} = -i$ .

c- Déduire que AEBF est un trapèze isocèle et que $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AF}) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

3) Soit h l'homothétie qui transforme A en F et E en B et soit r la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

qui transforme B en F.

a- Déterminer le centre W de h.

b- Démontrer que $h o r = r o h$ .

c- Soit $S = h o r$ .

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S .

## EXERCICE 11

Dans un plan orienté, on donne un rectangle direct AEFD
tel que : $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$, $AE = 2\sqrt{2}$ et $AD = 2$.
On désigne par B et C les milieux respectifs de [AE] et [FD].
Soit S la similitude plane directe qui transforme A en C et E en B.

1) a- Déterminer le rapport k et un angle $\alpha$ de S.

b- Montrer que S (F) = E et déduire S (D).

2) Soit W le centre de S et soit h la transformation définie par h = S o S.

a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.

b- Trouver h (D) et h (F) et construire le point W.

3) On désigne par I le milieu de [BE].

a- Démontrer que W, C et I sont alignés.

b- Exprimer $\overrightarrow{WC}$ en fonction de $\overrightarrow{WI}$.

4) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(A; \vec{u}, \vec{v})$ avec $z_B = \sqrt{2}$ et $z_D = 2i$

a- Trouver la forme complexe de S.

b- Déterminer l'affixe de W.