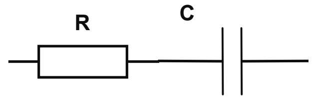
LE DIPÔLE RC

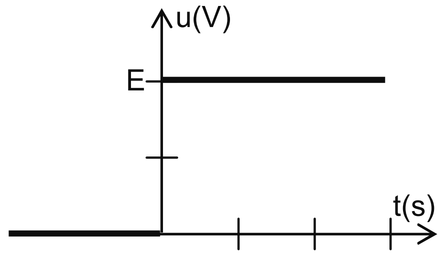
I Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension

1 Dipôle RC



Le dipôle RC est constitué d'un condensateur associé en série avec un résistor (conducteur ohmique).

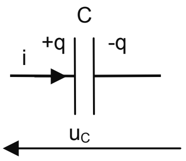
2 Echelon de tension



U est une tension appliquée aux bornes du dipôle RC, à t=0 s on ferme le circuit. Si :
Pour t<0 ; u =0
Pour $t \geq 0$; u = E.
On dit alors qu'on applique un échelon de tension au dipôle RC.

3 Relation entre i(t) et $u_c(t)$

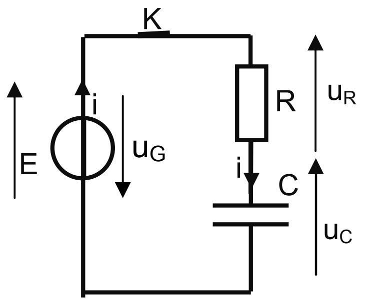
En courant variable : $i(t) = \frac{dq}{dt}$.



$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} \text{ avec } q = C.u_c \text{ donc } i = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C.\frac{du_c}{dt}}$$

à retenir

4 Equation différentielle



(on doit représenter les flèches des tensions avant d'établir l'équation différentielle).
Le condensateur est initialement déchargé, à la date t=0, on ferme l'interrupteur K.
d'après la loi des mailles :
$u_R + u_c + u_G = 0$ avec $u_R = Ri$ et $u_G = -E$

$Ri + u_c - E = 0$ or $i = C.\frac{du_c}{dt}$

$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$, on pose $\tau = RC$

$$\boxed{\tau\frac{du_c}{dt} + u_c = E} \text{ ou } \boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}}$$

5 Solution de l'équation différentielle

a- Solution de l'équation différentielle :

L'équation différentielle précédente a pour solution $u_C = A + Be^{-\alpha t}$.
Avec A ; B et α sont des constantes positives. Déterminons A ; B et α :

1ère étape : Le condensateur est initialement vide $u_C(0) = 0$.
$A + Be^0 = 0 \Leftrightarrow A + B = 0$ donc B= - A. D'ou $u_C = A - Ae^{-\alpha t}$.
2ème étape : lorsque $t \rightarrow +\infty$; le condensateur est complètement chargé : $u_C(\infty) = E$.
$A - Ae^{-\infty} = E$ or $e^{-\infty} = 0$.
A – 0 = E d'où A=E et B= - E.
Donc $u_C = E - Ee^{-\alpha t}$.
$u_C = E(1 - e^{-\alpha t})$.

<u>3ème étape</u> : Cette solution vérifie l'équation différentielle $RC\dfrac{du_c}{dt}+u_c=E$

Donc : $RCE(0-(-\alpha)e^{-\alpha t}) + E(1-e^{-\alpha t}) = E$

$RCE\alpha e^{-\alpha t} + E - E\,e^{-\alpha t} = E \Leftrightarrow RCE\alpha e^{-\alpha t} - E\,e^{-\alpha t} = 0 \Leftrightarrow Ee^{-\alpha t}(RC\alpha - 1) = 0.$

Or $Ee^{-\alpha t} > 0$ d'où $RC\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow RC\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{\tau}.$ $\qquad$ $u_C = E(1-e^{-t/\tau}).$

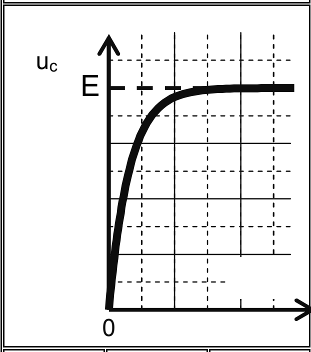
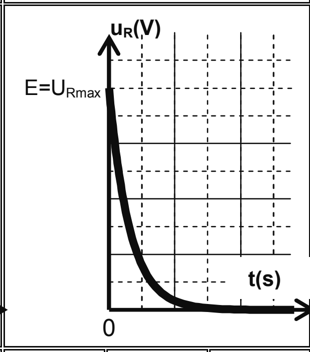
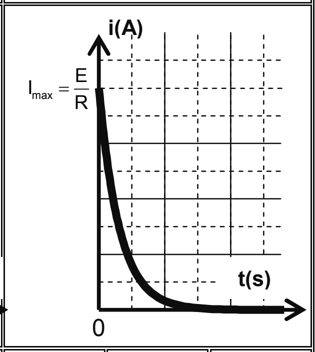
6 Expression de $u_R(t)$ et de $i(t)$

Expression de $u_R(t)$; $\quad u_R = E - u_c = E - E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = E - E + Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ d'où $\boxed{u_R = Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$

Expression de $i(t)$

$$i = \frac{u_R}{R} \quad \text{donc} \quad \boxed{i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

7 Graphes de $u_c(t)$, $u_R(t)$ et de $i(t)$

<table>
<tr><td colspan="3">$u_c = E(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$</td><td colspan="3">$u_R = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$</td><td colspan="3">$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>t(s)</td><td>0</td><td>+∞</td><td>t(s)</td><td>0</td><td>+∞</td><td>t(s)</td><td>0</td><td>+∞</td></tr>
<tr><td>u_c(V)</td><td>0</td><td>E</td><td>u_R(V)</td><td>E</td><td>0</td><td>i(A)</td><td>$\frac{E}{R}$</td><td>0</td></tr>
</table>

8 La constante de temps τ

a- **Définition** :

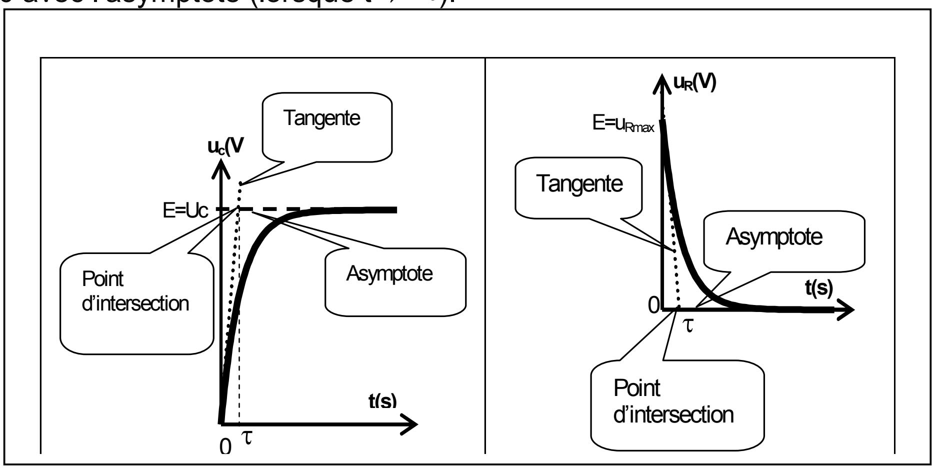
La constante de temps τ est une grandeur caractéristique du dipôle RC, elle nous renseigne sur la rapidité avec laquelle s'effectue la charge ou la décharge d'un condensateur.

b- Unité de τ :

$$\tau = RC \text{ avec } \begin{cases} R = \dfrac{u_R}{i} \text{ donc R est en } \dfrac{V}{A} \\ C = \dfrac{q}{u_C} \text{ or } q = It \text{ donc C est en } \dfrac{A.s}{V} \end{cases} \text{ d'où } \tau \text{ est en } \frac{V}{A}.\frac{A.s}{V} = s$$ (seconde) donc τ est un temps.

c- Détermination de τ :

- **Par calcul :** Ayant les valeurs de R(en Ω) et de C(en F), on peut calculer directement τ(en s) ; τ = RC .
- **Graphiquement** : **<u>1ère méthode</u> (utilisation de la tangente à l'origine)** : on peut montrer que τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de u_c (t)[de même pour u_R(t), i(t) et q(t)] à la date t=0 avec l'asymptote (lorsque t→+∞).



- **2ème méthode (lecture graphique)** :

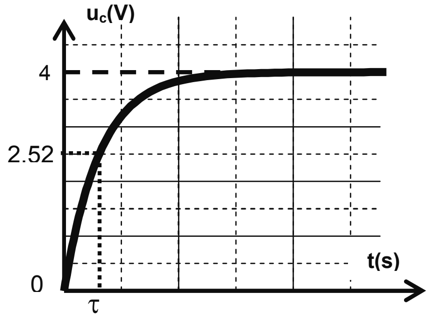
1er cas : à partir du graphe de $u_c(t)$

Pour $t=\tau$, quelle est la valeur de u_c ?

$$u_c(\tau) = E(1 - e^{\frac{-\tau}{\tau}}) = E(1-e^{-1})$$ [illegible] 7

Exemple :

On a E= 4 V d'où 0,63.4 =2,52 V donc l'abscisse du point d'ordonnée 2,52 V est égale à τ



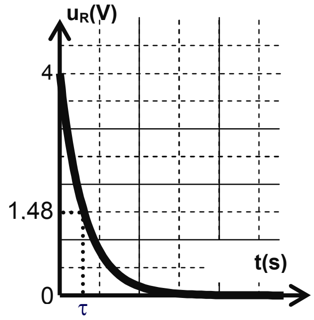
2ème cas : à partir du graphe de $u_R(t)$

Pour $t=\tau$, quelle est la valeur de u_R ?

$$u_R(\tau) = E.e^{\frac{-\tau}{\tau}} = E.e^{-1}$$ [illegible] 7E

Exemple :

On a E= 4 V d'où 0,37.4 =1,48 V donc l'abscisse du point d'ordonnée 1,48 V est égale à τ.



9 Durée de charge d'un condensateur

On peut considérer qu'un condensateur est complètement chargé lorsque sa tension u_c = 0,99E ce qui donne une durée de charge $t \approx 5\tau = 5RC$

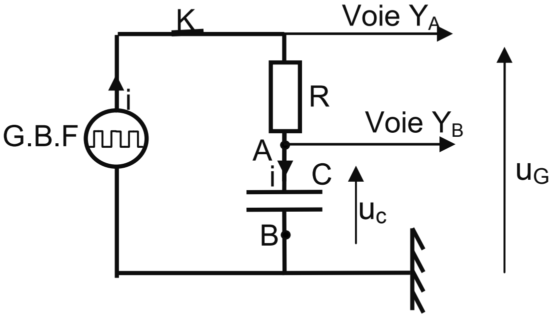
Le temps de charge augmente avec R et avec C.

Pour $t < 5\tau$, on a le régime transitoire.

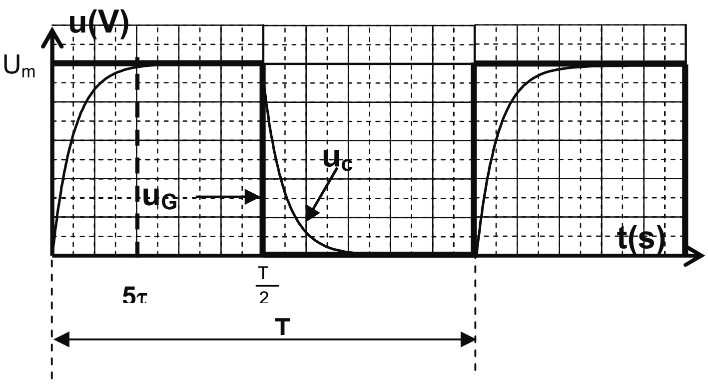
Pour $t \geq 5\tau$, on a le régime permanent.

Remarque :

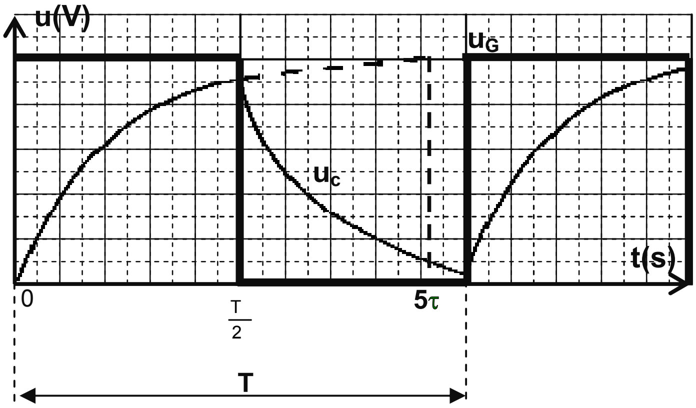
- la réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension est la charge progressive du condensateur : c'est un phénomène transitoire.
- Charge d'un condensateur par une tension créneaux.



Pour $5\tau < \frac{T}{2}$, pendant une demi-période la tension u_c peut atteindre sa valeur finale donc on observe les courbes suivantes (les deux voies ont la même sensibilité verticale) :



Pour $5\tau > \frac{T}{2}$, pendant une demi-période la tension u_c ne peut pas atteindre sa valeur finale donc on observe les courbes suivantes :

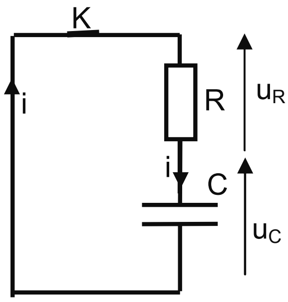


II La décharge d'un condensateur

1- **Equation différentielle :**

(on doit garder la même orientation du circuit).

Le condensateur est initialement chargé, à la date t=0, on ferme l'interrupteur K.



d'après la loi des mailles :

$u_R + u_c = 0$ avec $u_R = Ri$

$Ri + u_c = 0$ avec $i = C.\dfrac{du_c}{dt}$

$RC\dfrac{du_c}{dt} + u_c = 0$, $\tau = RC$

$$\boxed{\tau\frac{du_c}{dt} + u_c = 0} \text{ ou } \boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = 0}$$

2- **Solution de l'équation différentielle :**

L'équation différentielle précédente a pour solution $\boxed{u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$.

Avec $\tau = RC$.

3- **Expression de $u_R(t)$ et de $i(t)$:**

Expression de $u_R(t)$

$u_R = 0 - u_c = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ d'où $\boxed{u_R = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$

Expression de i(t) : $i = \dfrac{u_R}{R}$ donc $\boxed{i = \dfrac{-E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$

4- **graphes de $u_c(t)$, $u_R(t)$ et de $i(t)$:**

$u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$	$u_R = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$	$i = \dfrac{-E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$